Undergraduate Texts in Mathematics 1

Groups and Symmetry

対称性からの群論入門

M.A.アームストロング 著
佐藤信哉 訳

Springer
シュプリンガー・ジャパン

対称性からの
群論入門

M.A.アームストロング 著
佐藤信哉 訳

Springer
シュプリンガー・ジャパン

Translation from the English language edition:
Groups and Symmetry by Mark A. Armstrong
Copyright © 1988 by Springer-Verlag New York, LLC.
Springer is a part of Springer Science+Business Media
All Rights Reserved

ジェロームとエミリーへ

雪の結晶の美しさは数学的な規則性と対称性によるものである．しかし，どういうわけか，1つの形には多くの似た形があり，それらはすべて関係しているのだが，2つとして同じものはない．このことが私たちの楽しみと驚きを限りなくかきたてるのである．

ダーシー・トムソン (D'Arcy Thompson)
(*On Growth and Form*, Cambridge, 1917)

ある種の整合性が与えられた興味深い数学的な構造だけが，連続的に自然な形で実現しているのだと私は一般に思う .... その上，このことは，連続的な図形の自己同型写像のなす群のように，多かれ少なかれ，明らかに奇妙な群があるような抽象的な群の理論のように専ら代数の理論においてとてもよく見受けられる．

ルネ・トム (René Thom)
(*Paraboles et Catastrophes*, Flammarion, 1983)

まえがき

数は大きさを測り，**群は対称性を測る**．この主張の前半は何の驚きもなく受け入れられる．そもそも，それが数が存在する「理由」なのだから．後半の主張は，言葉と初等的な群論のハイライトのいくつかを紹介するための試みとして，この場で宣伝されるものである．

まず，内容と形式に関して一言述べるのがふさわしいように思う．この本では，最初から最後まで，立体と模様の対称性の群に重点を置きながら，例に特に重きを置いている．ほとんどすべてのトピックは最も自然な役割を演じている群の姿を見せるように選ばれている．その役割とは，集合の元に対する作用（あるいは置換）であり，集合は正 6 面体の対角線や木の辺あるいは与えられた群の部分群のなすある集合だったりもする．題材は 28 の短い章に分けられており，その各章では新しい結果やアイディアが紹介されている．目次を一目見てみると,「初級コース」の多くの要点がここにはあることがわかるだろう．ラグランジュ(Lagrange)，コーシー (Cauchy)，シロー (Sylow) の定理はすべてそれ独自の章を割かれており，有限生成アーベル群の分類や，有限回転群と 2 次元結晶群の数え上げ，そしてニールセン (Nielsen)–シュライアー (Schreier) の定理も同様である．

私は，定理として重要な結果だけを挙げることにして，際限なく定義を列挙することを避け，できる限りどこでも形式張らないように心がけた．私の目的は，講義の支えとして読まれる本あるいは講義の支えがなくても読める本を書くことであった．新しい概念は太字で示され[1]，目次に容易に見つけられるようにはしてあるが，この本は辞書やハンドブックのように使われるようには書かれていない．各章は内容を整理できる目的で用意された，一連の

---

[1] ［訳注］この邦訳書でも太字にし，その後に原語を併記した．ただし，訳者が重要であると判断した用語に関しても同様に記した．

演習問題で終わる．これらは，時には，本文の内容を埋める場合もある．ある章から次の章へ移る前に，できる限り多くこれらの演習問題を通して学ぶことが本質的である．数学は見物のためにあるわけではない．つまり，理解と自信と熱狂を得るためには，人は耐えなければならない．

前提条件として，線型代数の初級コース（行列の掛け算とユークリッド空間の間の線型写像の行列による表現を含むが，抽象的なベクトル空間の理論は含まない）に加えて，実数と複素数の基本的な性質に習熟していることを私は仮定している．とりわけ行列は応用においてはあまりにも頻繁に使われるので，豊富な例の源としての行列群なくしては群論を教えても哀れに見えてしまうだろう．

この種の初等的な題材はすべて共通に蓄えがあるにもかかわらず，固定的でなく，時に応じて改良がなされる．そのような改良の 3 つをここで述べておくべきだろう．シローの定理（20 章）への H. Wielandt によるアプローチ，コーシーの定理（13 章）の James H. McKay による証明，J.-P. Serre による木の上に作用する群の導入（28 章）である．もう 1 つの影響は，より個人的な性格のものである．生徒として，私は A. M. Macbeath と共に学ぶという大変な幸運に恵まれた．彼の講義が私を群論へと最初に導いたのである．生徒から先生への感謝の恩義は，同じようなことをすることで一番報われる．この小さな本が，私に示されたのと同じ数学の美しさの鑑賞のいくつかを与えることができれば，私にとって本望である．

ダーラム，英国　　　　　　　　　　　　　　　　　　M. A. A.
1987 年 9 月

謝辞

原稿の多くを読んで，コメントをくれた Andrew Jobbings，何年間にも渡り多くの刺激的な討論をしてくれた Lyndon Woodward，とても素晴らしいユーモアを持ち，原稿のタイプ打ちに耐えてくれたミセス S. Nesbitt，それにすでに出版されている題材の使用を快く許してくれた以下の出版社へ私の感謝の気持ちを送ります．Cambridge University Press（*On Growth and Form* からの引用），Flammarion（*Paraboles et Catastrophes* からの引用），Dover Publications（*Snow Crystals* から引用した図 2.1），Office du Livre,

Fribourg（*Ornamental Design* から引用した図 25.3 と図 26.3 の一部），そして，Plenum Publishing Corporation（*Symmetry in Science and Art* から引用した図 26.3 の一部）.

目　次

第1章　正4面体の対称性

1つの4面体にはどれだけ多くの対称性があるだろうか？ 正4面体 T を考えて，簡単のために，回転に関する対称性だけを考えることにしよう．図1.1には2つの回転軸が描かれている．1つは L と名付けられたもので，4面体の1つの頂点とその対面の重心を通るものであり，もう1つは，M と名付けられ，4面体の向かい合う辺の中点どうしを通るものである．L のような回転軸は4つあり，各軸に関して $2\pi/3$ ラジアン，$4\pi/3$ ラジアン[1]の2つの回転それぞれによって，4面体はそれ自身に写される．これらの回転の向きの意味は図示されているとおりである．つまり，回転軸に沿って軸上の頂点から眺めて，向かいの面を反時計回りに回転させる．もちろん，逆向きに $2\pi/3$（あるいは $4\pi/3$）回転をすれば，T を $4\pi/3$（あるいは $2\pi/3$）回転することと全く同じ効果を与える．軸 M については，どのようにしても π だけの回転しかもともとの4面体に写されない．このような軸は3つある．これまでで，正4面体に $(4 \times 2) + 3 = 11$ の対称性があることになる．T 自身をその場にとどめておくと，これはこれまで考えてきたどの軸についても 2π という1周の回転をすることと同等であるから，このような恒等的な対称性も勘定に入れると正4面体には合計で12の回転対称性があることになる．

私たちは当初の疑問に答えたかのように見える．恒等的な対称性を含めて，ちょうど12の回転があり，これらの回転により正4面体はそれ自身に写されるのである．しかし，これで話は終わりではない．同等な面を両面に持つ平坦な6角形の板もまた12の回転対称性を持ち（図1.2），正12角形を底辺に持つ正角錐も同様に12の回転対称性を持つのである（図1.3）．板に関しては，その重心を通り，面に垂直な軸について5つの回転対称性（$\pi/3$, $2\pi/3$, π, $4\pi/3$, $5\pi/3$ 回転）がある．加えて，向かい合う2つの角を通る3つの軸

[1]［訳注］以後，角度の単位ラジアンは省略して書くことにする．

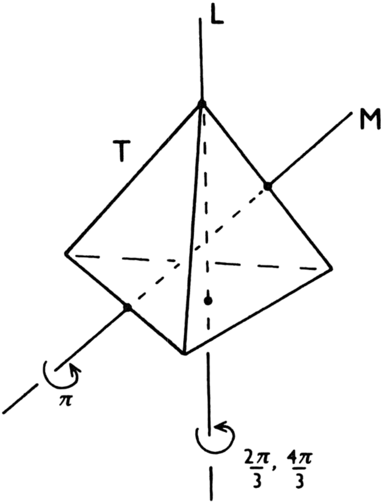


図 1.1

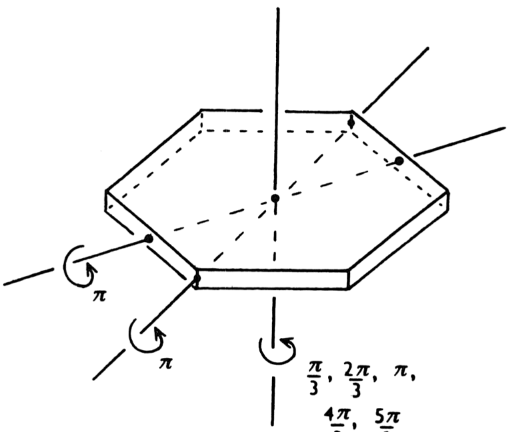


図 1.2

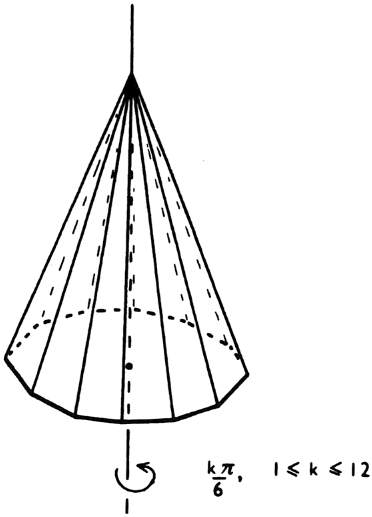


図 1.3

と向かい合う 2 つの辺の中点を通る 3 つの軸があり，これらの各軸に関して板を π 回転させることができる．恒等的な対称性を忘れてはいけない．これでまた合計 12 の回転対称性があることになる．正角錐に関しては，1 つの軸についての回転対称性しか持たない．軸は正角錘の頂点と底面の正 12 角形の重心を結ぶもので，この軸について 12 の異なる回転（適当に回転の向きを定めて，$k\pi/6$ 回転，$1 \leq k \leq 12$）がある．正 4 面体，板，正角錘の各場合において 12 の回転対称性があることを見つけた事実にもかかわらず，まったくもって明らかにこれらの対称性は同じ回転対称性を表してしないのである．

最も顕著な違いは，正角錘は唯 1 つの対称軸しか持たないということである．この軸に関する $\pi/6$ の回転は，12 回繰り返さないと（言い換えれば，1 回の回転をそれと掛け合わせて）もともとの角錐の位置に戻らないのである．実際，この基本的な回転の適当な繰り返しによって，他の 11 すべての対称性を作り出すことができるのである．しかしながら，板や正 4 面体の 1 つの回転を繰り返しても他のすべての回転を与えることはないであろう．

より注意深く見てみると，対称性の掛け合わせの仕方について，一方あるいは順序を逆にしてすべての場合について行わければならないが，その違い

を見つけることができる．例えば，正角錐の対称性はすべて掛け合わせに関して互いに**交換する**．すなわち，2つの回転をどのように取ってきても，1つの回転の後にもう1つの回転を行い，あるいはその逆の順序で行っても，正角錐に対する効果は全く同じである．(これらの回転はすべて同じ回転軸を持っているので，それゆえ，少しくどいが，$\pi/3$ 回転してから，$5\pi/6$ 回転すると $7\pi/6$ 回転になるが，$5\pi/6$ 回転してから，$\pi/3$ 回転しても結果は同じになる.）正4面体や板のような場合には，このようなことは起こらない．正4面体の場合に実験してみることを勧める．正4面体 T の頂点に図1.4のように番号を付けると，ある特定の回転対称性についての効果をはっきりと目に見ることができる．回転 r（L 軸について，図に示された向きに $2\pi/3$ 回転）と回転 s（M 軸について π 回転）とを考えよう．先に r を行って，次に s を行うと，頂点2はもともとの位置に戻り，N 軸についての回転を与える．しかし，先に s を行ってから，r を行うと，頂点2はもともと頂点4のあった場所へ移動するから，同じ回転となることがない．先に r を行ったときに s の回転軸を一緒に動かしてしまうという罠にはまってはいけない．r も s も両方とも空間の固定された回転と考えられるべきであって，各回転の軸は空間の中に**固定されている**のであり，その各々が T をそれ自身へと回転して写しているのである．

では，3つ目の考察である．正角錘には回転が唯1つしかなく，その回転を自分自身と掛け合わせることにより恒等的な対称性を与える．すなわち，π 回転のことである．板には7つのこのような回転対称性があり，正4面体には3つある．正4面体のこれら3つの π 回転は互いに交換するが，板に属する7つの π 回転のうち，1つだけが他の6つ全部と交換する．どれか？ 見つけ出すまで，自分で実験してみよ．

対称性をそれなりに測るためには，単に対称性の数を数えるだけでは十分ではない．つまり，対称性がどのように互いに掛け合わされるかも考慮に入れなければならない．この掛け合わせの情報を捕らえるものこそが，いわゆる対称性の群であり，私たちがこれから述べようとするものである．

正4面体 T の回転対称性のなす集合は，いくつかの「代数的構造」を持つ．2つの対称性 u, v が与えられると，先に v を行い，次に u を行うことにより，**掛け合わせる**ことができ，その結果，T をそれ自身へと写す新しい回転を生み出す．私たちはこの操作を uv と書くことにする．(vu ではなく uv と書く私たちの記法は，2つの関数の合成の記法に影響を受けている．関数の合成のときは，fg はたいていの場合先に g を施してから f を施す.）**恒等的**

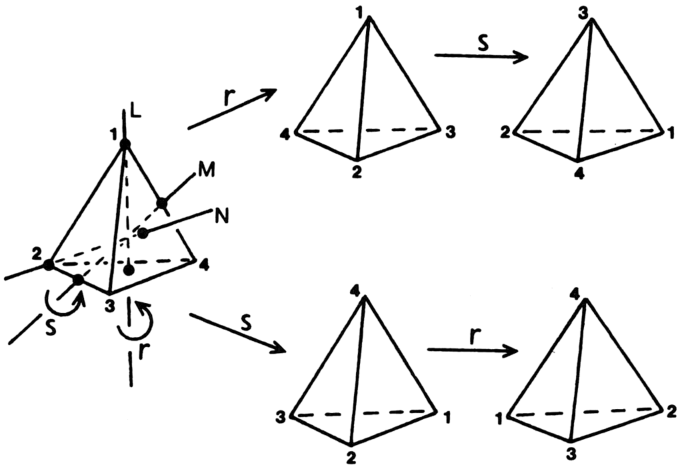


図 1.4

な回転を e と書くことにするが，これはかなり特別な振る舞いをする．先に e を施してから，別の回転 u を施しても，先に u を施してから e を施しても常にただ単に u を施すのと同じ結果を与える．言い換えれば，T のどのような対称性 u に対しても，$ue = u$ かつ $eu = u$ となる．各回転 u はいわゆる**逆元** u^{-1} を持つ．これはまた T の対称性であり，$uu^{-1} = e$ かつ $u^{-1}u = e$ を満たすものである．u^{-1} を得るには，u と同じ軸に関して同じ角度だけ回転するのだが，逆向きに回転すればよい．(例えば，回転 r の逆元は rr になる．なぜならば，r を 3 回施すと，恒等的になるからである．) 最後に，3 つの回転 u, v, w を取ってきて，先に w をしてから次に掛け合わせ uv をしても，先に vw を施してから，次に u を施してもその結果は同じになる．T のどのような 3 つの（必ずしも異なるとは限らない）対称性に対して，これを記号で表せば，$u(vw) = (uv)w$ となる．

正 4 面体のこの代数的な構造を持つ 12 の対称性は，正 4 面体の回転対称性の群を形成する．

演習問題

1.1. 1つの3角形の面を共有するように，2つの正4面体を貼り合わせる．この新しい立体のすべての回転対称性を求めよ．

1.2. 正6面体のすべての回転対称性を見つけよ．

1.3. 図1.4の記号を使う．掛け合わせの回転 srs の回転軸は頂点4を通ることを示せ．また，$rsrr$ の回転軸は辺12と34のそれぞれの中点によって定まることを示せ．

1.4. 前問が解けたら，正4面体の12の回転対称性の各々を r と s を用いて表せ．

1.5. 再び図1.4の記号を使う．$r^{-1} = rr$, $s^{-1} = s$, $(rs)^{-1} = srr$, $(sr)^{-1} = rrs$ となることを確かめよ．

1.6. 正4面体は，反転と反転の掛け合わせから得られるものを許せば，合計24の対称性を持つことを示せ．回転でも反転でもない対称性を特定せよ．この対称性は3つの反転の掛け合わせであることを確かめよ．

1.7. q を正4面体の重心と1つの辺で定まる平面に関する反転とする．u をある回転とするとき，回転対称性と uq の形をした対称性を合わせると，正4面体の24すべての対称性を与えることを示せ．

1.8. 正5角形，正6角形のすべての平面対称性（回転と反転）を見つけよ．

1.9. 図1.2の正6角形の板は全部で24の対称性を持つことを示せ．他のすべての対称性と交換する対称性を見つけよ．

1.10. 正8面体，正12面体，正20面体（図8.1を見よ）の模型を作って，これらの各立体の対称性をできる限りたくさん探しあててみよ．

第2章　群の公理

正4面体の対称性を足がかりにして，すんなりと群の概念を定義することとしよう．最初の中身は，集合である．第2の中身は，集合の2つの順序付けられたどのような元の組 x, y を掛け合わせても，唯1つの「合成」xy が**再びもとの集合に入る**ようになる規則である．この規則は通常与えられた集合上の「積」と呼ばれる．

群 (group) とは，集合 G が G 上に積を持ち，以下の3つの公理を満たすときをいう：

(a) 積は結合的である．すなわち，$(xy)z = x(yz)$ が G のどのような3つの（必ずしも異なるとは限らない）元に対しても成り立つ．
(b) G の中に単位元と呼ばれる元 e があって，G のどのような元 x に対しても，$xe = x = ex$ を満たす．
(c) G の各元 x は（いわゆる）逆元 x^{-1} を持ち，これが集合 G に属し，かつ $x^{-1}x = e = xx^{-1}$ を満たす．

公理の形で言い表された形式的な定義はどのように役立つのだろうか？これまでのところ，全く役に立っていない．というのも，実際，もし唯一の群が正4面体の回転対称性のなす群であったならば，時間を無駄にするだけになってしまうだろう．しかし，そんなことはないのである．つまり，群の概念は多くの異なる状況において育っているのである．

私たちの誰もが実数のなす集合の加法的な群の構造を無意識に理解している．ここで，順序付けられた元の組 x, y を掛け合わせる規則は，単にこれらを足し合わせて $x+y$ を与えることである．どのような3つの実数に対しても，$(x+y)+z = x+(y+z)$ が成り立つことや，単位元，つまり，0，がある

ことや，$-x$ が明らかに実数 x に対する逆元であることは納得できる．なぜ上で合成や積という言葉を「　」でくくったのかをこの例は示している．元を掛け合わせることができる規則は，変わることなく決まって，積と称される．しかし，その規則は普通の意味での数の積と全く関係がないかもしれないのである．

ある化学者は特定の分子の持つ対称性の総計に興味があるかもしれない．例えば，メタン (CH_4) は正4面体の重心の位置に炭素原子があり，4つの陽子（水素原子）が正4面体の頂点に配置されていると考えられている．一方，ベンゼン分子 (C_6H_6) は，炭素原子が正6角形を形取り，各頂点に1つの水素原子が炭素原子と結合しているものという模型で考えられる．(6角形の対称性は，自然界において共通のものである．ひょっとすると，雪の結晶の構造ほど楽しいものはないのではないだろうか．図2.1を見よ.）私たちが正4面体と正6角形で経験してきたことから，2つの対称性をどの順で掛け合わせるかが問題であることはわかっている．それゆえ，**順序付けられた**元の組と頻繁に称してきたのである．群の中の2つの元を x, y の順で取るのか，その逆の順序 y, x で取るのかでは違いがあるのである．前者に対しては，群の規則より xy を得て，後者に対しては yx を得るが，これら2つが等しい必要はないのである．

相対性理論を学ぶ物理学者は，ローレンツ (Lorentz) 群に出くわしている．これは，

$$\begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

という形の行列の元からなり，行列の積によって掛け合わせが与えられるものである．$\cosh u, \sinh u$ は，式 $x = \cosh u,\ y = \sinh u$ が双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を決定することから，これらは双曲線関数と呼ばれるのであったことを思い出そう．これらは，次の式を満たす．

$$\cosh(u \pm v) = \cosh u \cosh v \pm \sinh u \sinh v,$$
$$\sinh(u \pm v) = \sinh u \cosh v \pm \cosh u \sinh v.$$

結果として，

$$\begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v \\ \sinh v & \cosh v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(u+v) & \sinh(u+v) \\ \sinh(u+v) & \cosh(u+v) \end{pmatrix}$$

となる．この積は**同じ形**の行列を与えている．単位行列は，単位元としての

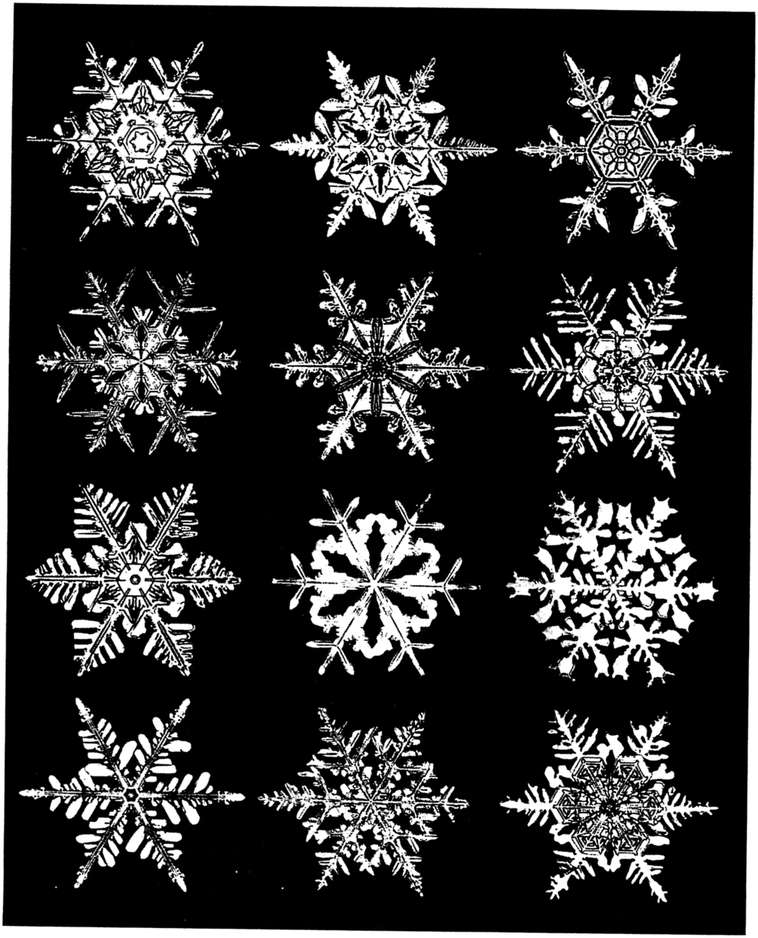


図 2.1

要求を満たしているし，次に示す行列と等しいことを考えれば，与えられた行列の集合の元になっている．

$$\begin{pmatrix} \cosh 0 & \sinh 0 \\ \sinh 0 & \cosh 0 \end{pmatrix}.$$

$(*)$ の逆元としては，

$$\begin{pmatrix} \cosh(-u) & \sinh(-u) \\ \sinh(-u) & \cosh(-u) \end{pmatrix}$$

を使うことができる．これは再び与えられた行列の集合の元の形をしている．行列の積は結合的であるから，私たちは1つの群を得る．

ユークリッド幾何学について考えている数学者は，具体的な群，つまり，平面の**相似変換**のなす群の元によって形を変えない図形の性質を研究していることに気付く．相似変換は，図形の形を保ったまま，拡大したり，縮小したりすることをいう．より正確には，その長さにどの線分にも共通な一定の数を掛ける相似変換は，線分を線分に写し，3角形は角度を保ったまま相似な図形に写されるが，向きについては必ずしも保たれない．2つの相似変換の合成は，別の相似変換となり，群の公理を満たすことは容易に確かめることができる（演習問題 2.4 を見よ）．

幅広い興味深い例の中に同じ類の構造を認めるときにこそ，抽象的なアプローチがその真価を発揮するのである．群の公理から出発して，その公理が満たされている限り使われるであろう多くの結果を作り上げようではないか．様々な群についてある特定の性質を逐一確かめなければならないことよりも，この方が，物事はもっとより満足できる状態になるだろう．

ここにすべての群に共通な2つの性質を挙げよう．**1つの群の単位元は唯1つである．** 2つの元 e と e' がともに単位元であったとしよう．このとき，e が単位元であることから，$ee' = e'$ であり，e' が単位元であることから，$ee' = e$ である．ゆえに，e は e' に等しい．**1つの群の各元の逆元は唯1つである．** y と z がともに x の逆元であると仮定しよう．このとき，

$$\begin{aligned} y &= ey && (e\text{ は群の単位元だから}) \\ &= (zx)y && (z\text{ は }x\text{ の逆元だから}) \\ &= z(xy) && (\text{積は結合的だから}) \\ &= ze && (y\text{ も }x\text{ の逆元だから}) \\ &= z && (e\text{ は単位元だから}) \end{aligned}$$

となる．ゆえに，y は z に等しく，x の逆元は実際唯 1 つである．両方の議論ともに，公理によって与えられる，群に関する事実だけを使っていることに注目しよう．これがあるからこそ，すべての群に対して上の結果が成り立つことに私たちは自信を持つことができるのである．

次に続くいくつかの章で，具体的な群の例に即して，理論的な結果を構築し始めよう．例は重要であるということを覚えておこう．例がなければ，理論は，知的なエンターテインメントとしては，せいぜい中身の乏しいものになる．

演習問題

2.1. 雪の結晶の対称性と図 1.2 の正 6 角形の板の持つ対称性とを比べてみよ．

2.2. 正の実数のなす集合は，掛け算によって群をなすことを示せ．

2.3. 次の実数を成分に持つ 2×2 行列の集まりのうち，行列の積で群となるものはどれか？

(i) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の形のもので，$ac \neq b^2$ を満たすもの．

(ii) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ の形のもので，$a^2 \neq bc$ を満たすもの．

(iii) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ の形のもので，ac が 0 でないもの．

(iv) 行列式の値が 0 でないもので，成分が整数となるもの．

2.4. f を平面の相似変換とする．f は全単射であり，逆写像 f^{-1} も相似変換であることを示せ．平面の相似変換の全体のなす集まりは，写像の合成を積として，群となることを確かめよ．

2.5. 平面から平面への写像で，どのような 2 点の間の長さも保つものは，等長変換と呼ばれる．等長変換は全単射でなければならないことを証明し，平面の等長変換の全体のなす集まりは，写像の合成を積として，群となることを確かめよ．

2.6. 平面上の固定された点 P を中心とする回転全体の集まりは，写像の合成の下で群となることを示せ．P を通る直線に関する反転全体の集まりについても同じことが成り立つか？ すべての回転とすべての反転を考えたら，何が起こるか？

2.7. x と y を群 G の元とする．G は，$wx = y$ かつ $xz = y$ を満たす元 w, z を含むことを証明せよ．また，これら各元は唯 1 つしかないことを示せ．

2.8. x と y が群 G の元であるとき，$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ となることを証明せよ．

第3章　数

おそらく群の公理に慣れるための方法として最も手っ取り早いのは，数からなるいくつかの群を見てみることであろう．以下のリストは例を与えるとともに，いくつかの記号の用法も与える．

数（実数あるいは複素数）の足し算により以下の各集合は群となる：

$\mathbb{Z}$,	整数全体の集合;
$\mathbb{Q}$,	有理数全体の集合;
$\mathbb{R}$,	実数全体の集合;
$\mathbb{C}$,	複素数全体の集合.

いずれの場合もゼロが単位元であり，$-x$ が数 x の逆元である．

数（実数あるいは複素数）の掛け算により以下の各集合は群となる：

$\mathbb{Q}-\{0\}$,	0 でない有理数全体の集合;
$\mathbb{R}-\{0\}$,	0 でない実数全体の集合;
$\mathbb{Q}^{\mathrm{pos}}$,	正の有理数全体の集合;
$\mathbb{R}^{\mathrm{pos}}$,	正の実数全体の集合;
$\{+1,-1\}$,	
$\mathbb{C}-\{0\}$,	0 でない複素数全体の集合;
C,	絶対値が 1 となる複素数全体の集合;
$\{\pm1,\pm i\}$.	

いずれの場合も数 1 が単位元であり，$1/x$ が数 x の逆元である．

このリストに含まれるものもや欠けているものも含めて，このリストをある程度詳細に調べる価値はある．2 つの整数を足せば，いつでも整数を得る．これは，整数の全体が足し算に関して群をなすことを確かめるときに，最初に気が付くべきことである．しかし，例えば，奇数のなす集合を考えたとき

に，元の掛け合わせの規則として足し算を再び使ったとすると，結果として，この集合は群にはなり得ない．なぜなら，2 つの奇数の和は偶数であり，それゆえ，偶数は奇数のなす集合には入らないからである．

群の積として数の掛け算を選んだとき，群を得たいと思うならば，実数の集合からゼロを取り除かなければならない．というのも，$x \cdot 0 = 1$ となる数 x は明らかに存在しないからである．言い換えれば，ゼロは積に関する逆元を持たない，ということである．ゼロを含まない実数，有理数，複素数はすべて掛け算について群をなすことは容易にわかる．ゼロを含まない整数はどうだろうか？ 掛け算ではこの集合を群にすることはできない．$x \cdot 2 = 1$ を満たす数は $\frac{1}{2}$ だけである．これは整数ではない．それゆえ，2 は整数の集合の中に積に関する逆元を持たない．

C で複素数平面上の単位円を表すものとする．つまり，絶対値が 1 の複素数のなす集合である．もし，$z, w \in C$ ならば，$|zw| = |z||w| = 1$ となり，$zw \in C$ となることがわかる．数 1 は C に属し，複素数の掛け算として単位元として作用している．最後に，$z \in C$ とすると，$|1/z| = 1/|z| = 1$ となり，$1/z \in C$ となる．つまり，C の各元は積に関する逆元を持ち，また，それも C に属することがわかる．よって，複素数の積に関して C は群となる．結合法則について何も述べなかったが，いかなる 3 つの複素数の積に関しても結合法則が成り立つことを認めれば，C のいかなる 3 つの元に関しても確かに結合法則は成り立つ．

厳密には，実数の和に関する群を記述するのに $(\mathbb{R}, +)$ といった記法を使うべきである．これにより，基礎となる集合は実数全体のなす集合で，群の「積」は数の足し算であることが完璧に明らかになる．実際には，このような記法では実用上面倒になるので，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ と和に関する群としての実数全体の集合に同じ記号を用いることとしている．たいていの場合は，どちらを意味するのかは文脈から明らかになるものである．リストに登場したその他の記号に関しても，対応する群を表すものとして使われるものとする．

整数全体のなす集合は，実数全体のなす集合の部分集合であり，両方とも足し算に関して群をなしている．このようなとき，$\mathbb{R}$ は $\mathbb{Z}$ の「部分群」であるという．このアイディアについては，5 章で再び取り上げる．

群が**可換** (commutative) あるいは**アーベル** (abelian) であるとは，$xy = yx$ がその群のどのような 2 つの元に対しても成り立つときをいう．リストに掲げたすべての例はアーベル群である．なぜなら，実数あるいは複素数のどのような 2 つの元 x, y に対しても，$x + y = y + x$ であり，$x \cdot y = y \cdot x$ とな

るからである.

n を正の整数としよう. 集合 $0, 1, 2, \ldots, n-1$ は n **を法として合同な足し算**を使えば, 群にすることができる. つまり, x と y をこの集合の元として,

$$x +_n y = \begin{cases} x+y & 0 \leq x+y < n \text{ のとき} \\ x+y-n & x+y \geq n \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義し, これを群の「積」として使うのである. 例えば, $5 +_6 3 = 8-6 = 2$ となる. (具体的な数を法として合同な数を考えることは身近なアイディアである. 例えば, 2π を法として合同な角の足し算を考えてみよ.) 群の公理を満たすことは容易に確かめられる. この和 $x +_n y$ は, 再び 0 と $n-1$ の間の整数となる. $(x +_n y) +_n z$ と $x +_n (y +_n z)$ の両方とも

$$\begin{array}{ll} x+y+z & 0 \leq x+y+z < n \quad \text{のとき} \\ x+y+z-n & n \leq x+y+z < 2n \quad \text{のとき} \\ x+y+z-2n & x+y+z \geq 2n \quad \text{のとき} \end{array}$$

に等しいので, 結合法則が成り立つ. ゼロは単位元であり, $n-x$ が x がゼロでないときの逆元である. $x +_n y = y +_n x$ であるので, この群はアーベル群である. それゆえ, n 個の元からなる有限アーベル群を得る. これを $\mathbb{Z}_n$ と表すことにする.

2つの整数が n **を法として合同である**とは, 2つの整数の差が n の整数倍だけ異なる場合をいう. もちろん, 各整数は n を法として整数 $0, 1, 2, \ldots, n-1$ のいずれか1つに合同となる. すなわち, x を n で割った余りになることである. この余りを「x の mod n 表示」あるいは単に $x \pmod n$ と呼ぶことにする. すると, $x +_n y$ は単に $x+y$ の mod n 表示となる.

整数 $0, 1, 2, \ldots, n-1$ は n を法として

$$x \cdot_n y = xy \pmod n$$

と掛け算されてもよい. 例えば, $5 \cdot_6 3 = 3$ である. なぜなら, 15 を 6 で割った余りは 3 だからである. この掛け算を使って群を得ることができるだろうか？ いつものように, ゼロは除かなければならない. しかし, これだけでは十分でないかもしれない. n として 10 としてみよう. すると, $2 \cdot_{10} 5 = 0$ である. したがって, 10 を法とする掛け算を $1, 2, \ldots, 9$ から選んだ2つの元に適用しても, 必ずしも1から9までの間の別の数を得るとは限らないのである. それゆえ, 群を得ることができない. 実際, n を法とした掛け算によっ

て $1, 2, \ldots, n-1$ が群になるのは，n が素数であるときに限るのである（演習問題 3.10）．簡単な計算でわかるように，整数 0, 2, 4, 5, 6, 8 を抜き取った残りの整数の集まりは 10 を法とした掛け算で群の構造を持つことがわかる．この結果は一般的な結果をも示唆するのだろうか？ （答えは 11 章で見つけられる.）

演習問題

3.1. 以下の各数の集合は足し算により群をなすことを示せ.

(i) 偶数の全体.

(ii) $a+b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ の形の実数全体.

(iii) $a+b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ の形の実数全体.

(iv) $a+bi$, $a, b \in \mathbb{Z}$ の形の複素数全体.

3.2. 演習問題 3.1 (iii) の集合を $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ と書くことにする．ゼロでない $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ の元 $a+b\sqrt{2}$ が与えられたとき，$1/(a+b\sqrt{2})$ を $c+d\sqrt{2}$ の形に表せ．ここで，$c, d \in \mathbb{Q}$ である．掛け算により，$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) - \{0\}$ は群となることを証明せよ．

3.3. n を正の整数とし，G を $z^n = 1$ となるすべての複素数 z の集合とする．複素数の掛け算で，G は群をなすことを示せ.

3.4. 前問で，n を動かして，これらすべての群の和集合

$$\cup_{n=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$$

もまた複素数の掛け算により群となることを確かめよ.

3.5. n を正の整数とする．どのような $x, y, z \in \mathbb{Z}$ に対しても，

$$(x \cdot_n y) \cdot_n z = x \cdot_n (y \cdot_n z)$$

を証明せよ.

3.6. 集合

$$\{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\},$$

$$\{1, 3, 7, 9\},$$

$$\{1, 9, 13, 17\}$$

の各々は 20 を法とした掛け算で群をなすことを確かめよ.

3.7. 次の集合のうちどれが 14 を法とした掛け算で群となるか？

$$\{1, 3, 5\}, \quad \{1, 3, 5, 7\},$$

$$\{1, 7, 13\}, \quad \{1, 9, 11, 13\}.$$

3.8. 集合 $\{1, 2, \ldots, 21\}$ の部分集合が偶数を含むか，数 11 を含むならば，その部分集合は 22 を法とした掛け算で群をなさないことを示せ.

3.9. pを素数とし，xを$1 \leq x \leq p-1$を満たす整数とする．$x, 2x, \ldots, (p-1)x$のいずれもpの倍数とはならないことを示せ．$1 \leq z \leq p-1$かつ$xz \pmod p = 1$となる整数zの存在を導け．

3.10. 演習問題 3.5 と 3.9 の結果を用いて，nが素数であれば，$\{1, 2, \ldots, n-1\}$はnを法とした掛け算で群となることを確かめよ．nが素数でない場合，何が問題となるか？

第4章　2面体群

以前に述べた平坦な正6角形の板に戻って考えてみよう．その12の回転対称性は自然な方法で掛け合わせることにより群をなす．3以上の各正の整数 n に対して，n 辺の長さが等しいような板を作ることができる．このようにして，可換ではない対称性の群の族を構成できる．これがいわゆる**2面体群** (dihedral group) である．

n が3のとき，3角形の板を作ることができる．これは6個の回転対称性を持ち，もし r と s が図4.1に描かれている回転を表すならば，これらは

$$e, r, r^2, s, rs, r^2s \qquad (*)$$

となる．ここで，r^2 は rr を省略形で書いたもので，r を2回実行することを

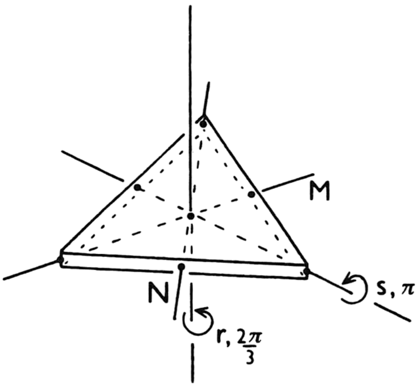


図 4.1

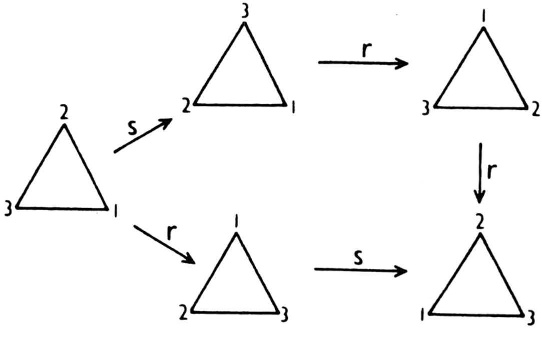


図 4.2

意味する．明らかに，r^3 は恒等的である．というのも，r を続けて3回施すと，2π 回転，すなわち1周することになるからである．そして，r のこれ以上のべき乗は何も新しいものを生み出さない．もちろん，s^2 も恒等的である．私たちの記号では，rs は3角形の板に先に s を施して，次に r を施して得られる対称性を表すのだったことを思い出そう．これを実行すると，図 4.2 のように，rs は M と名付けられた対称性の軸に関する π 回転となることがわかる．同様に，r^2s は軸 N に関する π 回転である．

6個の元 (*) は，群をなす．これを D_3 と表す．それゆえ，もし2つの元を取ってきて，それらをどちらかの順で掛け合わせると，いずれの場合でも群の元を得るはずである．rs は (*) にあるが，sr はどこにあるのだろう？ 図 4.2 を再び見てみると，これは r^2s に等しい．同様に，$sr^2 = rs$ である．これは図形的に確かめてもよいのだが，代数的に確かめるには次のようにすればよい．

$$\begin{aligned} sr^2 &= s(rr) = (sr)r = (r^2s)r = r^2(sr) \\ &= r^2(r^2s) = r^4s = r^3(rs) = e(rs) \\ &= rs. \end{aligned}$$

結合法則を繰り返し使っていることに注意せよ．この計算は結構たいそうなように見えてしまうが，ちょっとした練習をつめば，これらすべての段取りを踏まなくても済むようになるだろう！ 私たちの目的は，$r^3 = e$, $s^2 = e$, $sr = r^2s$ がわかっていて，任意の積を計算して，リスト (*) にある6個の元

をすべてを作り出せるということを実際に確かめることである．ここにもう2つの例を挙げよう．

$$r(r^2s) = r^3 = es = s,$$
$$(r^2s)(rs) = r^2(s(rs)) = r^2((sr)s) = r^2(r^2s)s)$$
$$= r^2(r^2s^2) = r^4s^2 = re = r.$$

上の計算の最初の段階で，$(r^2s)(rs) = ((r^2s)r)s$ とすることもできただろう．願わくば，同じ結果であってほしいが．実際，r^2srs のような積は，どの項にかっこを付けようとも計算結果は変わらないのである．より一般に，**$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が群の元であるとき，これらの元をこの順に任意の 2 通りの方法で掛け合わせても同じ結果を得るのである．**つまり，積 $x_1x_2\cdots x_n$ はかっこがなくても意味を成すのである．演習問題 4.10 に帰納法による証明の概略がある．帰納的に証明する段階で結合法則を用いる．

これで計算はより穏やかなものになる．例えば，

$$xyy^{-1}x^{-1} = xex^{-1} = xx^{-1} = e$$

となり，同様に $y^{-1}x^{-1}xy = e$ となる．ゆえに，**x と y が群の元であれば，$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ となる．**同様にして，**$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が群の元であるとき，**

$$(x_1x_2\cdots x_n)^{-1} = x_n^{-1}\cdots x_2^{-1}x_1^{-1}$$

となる．

元 x の m 個のコピーの積を x^m と表し，x^{-1} の n 個のコピーの積を x^{-n} と表す．このとき，$x^mx^n = x^{m+n}$ かつ $(x^m)^n = x^{mn}$ が任意の 2 つの整数 m と n に対して成り立つ．ここで，x^0 は単位元と理解することにする．

次の表は，**乗法表**と呼ばれ，D_3 から取ってきた順序付けられた元の組 x, y に対する，起こり得る 36 すべての積 xy を表している．

	e	r	r^2	s	rs	r^2s
e	e	r	r^2	s	rs	r^2s
r	r	r^2	e	rs	r^2s	s
r^2	r^2	e	r	r^2s	s	rs
s	s	r^2s	rs	e	r^2	r
rs	rs	s	r^2s	r	e	r^2
r^2s	r^2s	rs	s	r^2	r	e

積 xy は行 x と列 y の交差点に置かれる．例えば，○で囲まれた要素は，$s(rs)$

である．表の中のどの行あるいはどの列にも群の元がちょうど1度だけ現れていることに注目せよ．これはいかなる群の乗法表においても正しい（演習問題4.4を見よ）．特に，単位元は各行に1度だけあり，これは群の各元が唯1つの逆元を持つという事実と対応している．

2面体群 D_n は n 個の等しい辺を持つ平坦な板の持つ回転対称性のなす群である．その元は D_3 で使われたのと全く同様の方法で記述することができる．r を板に垂直な対称性の軸に関する板の $2\pi/n$ 回転とし，s を板の平面にある対称性の軸に関する π 回転とする．このとき，D_n の元は，

$$e, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, rs, r^2s, \ldots, r^{n-1}s$$

となる．明らかに，$r^n = e$, $s^2 = e$ であり，図形的に $sr = r^{n-1}s$ となることを確かめることができる．それゆえ，$r^{n-1} = r^{-1}$ であり，この最後の関係式を通常 $sr = r^{-1}s$ と書く．以前と同じく，他のすべての積は，これらを使って，計算することができる．例えば，

$$sr^2 = srr = r^{-1}sr = r^{-2}s = r^{n-2}s$$

となる．この群の各元は r^a または $r^a s$ の形をしている．ここで，$0 \leq a \leq n-1$ であり，

$$\left.\begin{aligned} r^a r^b &= r^k, \\ r^a(r^b s) &= r^k s \end{aligned}\right\} \text{ここで } k = a +_n b$$

$$\left.\begin{aligned} (r^a s)r^b &= r^l s, \\ (r^a s)(r^b s) &= r^l \end{aligned}\right\} \text{ここで } l = a +_n (n-b)$$

であることがわかる．r と s は群 D_n を「生成する」という．これは5章で確立されることになるアイディアである．

有限群の**位数** (order) とは，その群に含まれる元の個数をいう．無限に多くの元を含む群は，**無限位数**を持つといわれる．群 G の位数を通常 $|G|$ と書く．もし x が群の元で，ある正の整数 n に対して $x^n = e$ となるならば，x は有限位数を持つという．また，$x^m = e$ となる最小の正の整数 m を x の**位数**という．そうでない場合，x は無限位数を持つという．

例．

(i) D_3 の位数は6である．位数3の元が2つ (r, r^2) あり，位数2の元が3つ (s, rs, r^2s) ある．

(ii) $\mathbb{Z}_6$ の位数も 6 である．元 1 と 5 はともに位数 6 であり，2 と 4 は位数 3 で，3 は位数 2 である．

(iii) $\mathbb{R}$ は無限位数を持ち，(0 を除く）すべての元は無限位数を持つ．なぜなら，実数に自分自身を繰り返し足し算していけば，もちろん 0 から始めない限り，決して 0 になることはないからである．

(iv) C は複素平面上の単位円を複素数の掛け算によって群としたものである．これは無限群であり，有限と無限の両方の位数を持つ．典型的な元 $e^{i\theta}$ は θ が 2π の有理数倍，つまり，ある整数 m, n に対して $\theta = 2m\pi/n$ となるときに限って，有限位数を持つ．

演習問題

4.1. 2 面体群 D_4 の乗法表を作成せよ．D_n には位数 2 の元は何個あるか？

4.2. $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_{12}$ のそれぞれの群の各元の位数を求めよ．

4.3. 整数 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14 は 15 を法とした掛け算で群をなすことを確かめよ．その乗法表を作成し，各元の位数を求めよ．

4.4. g を群 G の元とする．g を固定したままで，G の元 x を変えていく．積 gx はすべて異なり，G の元すべてを与えることを証明せよ．同様のことを積 xg に対しても証明せよ．

4.5. 群の元 x が $x^2 = e$ を満たすのは，$x = x^{-1}$ のときに限る．この考察を用いて，位数が偶数の群は位数 2 の元を奇数個含まなければならないことを示せ．

4.6. x, y を群 G の元とする．x, y, xy の 3 つすべてが位数 2 を持つならば，$xy = yx$ であることを証明せよ．

4.7. G を $0 \leq x < 1$ を満たす有理数 x 全体の集合とする．

$$x + y = \begin{cases} x + y & 0 \leq x + y < 1 \text{ のとき} \\ x + y - 1 & x + y \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

と演算 $x + y$ を定めるとき，G はすべての元が有限位数を持つ無限アーベル群となることを示せ．

4.8. x と g を群 G の元とする．x と gxg^{-1} は同じ位数を持つことを示せ．これにより，G の任意の 2 つの元 x, y に対して，xy と yx は同じ位数を持つことを証明せよ．

4.9. 2×2 行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

で，$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ かつ $ad - bc = 1$ を満たすもの全体は，行列の積により群をなすことを確かめよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

とおくとき，A, B, AB, BA の位数を求めよ．

4.10. **一般結合法則．** G を群とし，$1 \leq k \leq n-1$ なる k に対して，G の元の積 $x_1x_2\cdots x_k$ がかっこなしで常に意味を成していると帰納的に仮定する．長さ n の任意の積が $x_1x_2\cdots x_n$ の項にかっこの付け方によらず定まることを確かめなければならない．これらの元を2つの異なる方法で掛け合わせたとし，2つの方法による最終的な掛け算が

$$(x_1x_2\cdots x_r)(x_{r+1}\cdots x_n) \tag{1}$$

$$(x_1x_2\cdots x_s)(x_{s+1}\cdots x_n) \tag{2}$$

となったとする．ここで，$1 \leq r < s \leq n-1$ とする．帰納法の仮定により，かっこ内の項は定義されている．(1) を

$$(x_1x_2\cdots x_r)[(x_{r+1}\cdots x_s)(x_{s+1}\cdots x_n)]$$

と書き，(2) も同様の方法で書き表して，通常の結合法則をかっこにくくられた3つの部分に適用すれば，議論が完結する．

第5章　部分群と生成元

2 面体群 D_6 において，6 個の元

$$e, r^2, r^4, s, r^2s, r^4s$$

は対称性の合成に関して群をなす．これは容易に確認できる．これらの元の任意の 2 つの積は別の元を与え，単位元も存在し，

$$e^{-1} = e,\quad (r^2)^{-1} = r^4,\quad (r^4)^{-1} = r^2,$$
$$s^{-1} = s,\quad (r^2s)^{-1} = r^2s,\quad (r^4s)^{-1} = r^4s$$

であるから，すべての元に関して逆元もまた存在する．図 5.1 を見れば，これらの元は，正 6 角形に内接した正 3 角形の回転対称性をなしていることがわかる．それゆえ，これらの元は D_6 の中にある D_3 の「コピー」をなしているといえる．これは次の意味で，D_6 の，いわゆる，部分群である．

群 G の**部分群** (subgroup) とは，G の部分集合で，それ自身が G の積により群となるものをいう．

(記号 G を群を表すのに使うときは，G は「積」を伴うものであり，単なる集合ではないことを覚えておかなければならない.)

群 G の部分集合 H があるとし，それが G の部分群であるかどうかを知りたい．このとき，3 つの質問を尋ねなければならない．H の 2 つの元 x, y が与えられたとき，G においてそれらの積 xy を作ることができる．この積はいつでも H に属するだろうか？ G の単位元は H に属するだろうか？ H の各元は G の中に逆元を確実に持つ．この逆元はいつでも H に属するだろうか？ もし，これらすべての質問の答えが，はい，であるならば，H は G の積に関して群となり，それゆえ，G の部分群となる．注意：結合法則は確か

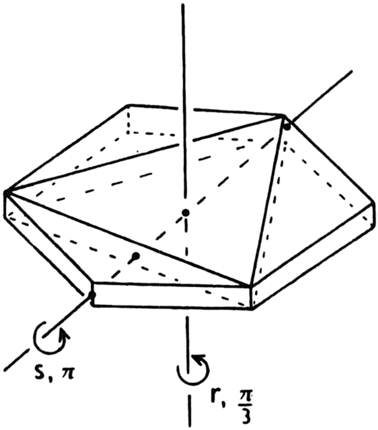


図 5.1

める必要はない．なぜなら，もし G のどのような 3 つの元 x, y, z に対しても $(xy)z$ と $x(yz)$ が等しいならば，G の部分集合から選ばれたどのような 3 つの元 x, y, z に対しても $(xy)z$ と $x(yz)$ は確実に等しいからである．H が G の部分群であるとき，$H < G$ と表す．

例．

(i) $\mathbb{Z} < \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} < \mathbb{R}$, $\mathbb{R} < \mathbb{C}$.

(ii) 偶数の集合を $2\mathbb{Z}$ と表すと，これは整数のなす加法的群の部分群となる．任意の正の整数 n に対して，$n\mathbb{Z}$ を各整数を n 倍したもの全体のなす集合とすると，これは $\mathbb{Z}$ の部分群となる．

(iii) $\mathbb{Q} - \{0\} < \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{R} - \{0\} < \mathbb{C} - \{0\}$.

(iv) $\{+1, -1\} < C$, $C < \mathbb{C} - \{0\}$.

(v) 元 e, r, r^2, r^3, r^4, r^5 は D_6 の部分群となる．これらは板の面を同じ側に保ったままの（板の面に垂直な軸に関する）回転である．

(vi) 元の集まり e, r, s, rs は D_6 の部分群とはならない．元 r はこの集合に入っているが，積 $rr = r^2$ は入っていない．

(vii) 整数 $0, 2, 4$ は $\mathbb{Z}_6$ の部分群となる．

例 (v) は次のように一般化される：群 G とその元 x が与えられていると

き，x のすべてのべき乗のなす集合（すなわち，ある整数 n について x^n の形をした G の元すべてのなす集合）は G の部分群である．(x の 2 つのべき乗の積 $x^m x^n$ は x^{m+n} であり，これは再び x のべき乗となる．G の単位元は x^0 である．そして，x^n の逆元は x^{-n} で，これは再び x のべき乗となる.）この部分群は，x **によって生成される部分群**と呼ばれ，記号では $\langle x \rangle$ と書かれる．もし x が無限位数を持つならば，$\langle x \rangle$ は，..., x^{-2}, x^{-1}, e, x, x^2, x^3, ... からなる．もし x が有限位数を持ち，その位数を m とすると，$\langle x \rangle$ の元は，e, x, x^2, ..., x^{m-1} となる．それゆえ，x の位数は x によって生成される部分群の位数にぴったり等しい．もし G の元 x で G のすべての元を生成する（つまり，$\langle x \rangle = G$ となる）ものが存在するならば，G は**巡回群** (cyclic group) と呼ばれる．

例.

(i) 数 1 は $\mathbb{Z}$ を生成する．-1 も同様である．それゆえ，$\mathbb{Z}$ は無限巡回群である．(群の構造は整数の足し算であるので，例えば，1 の 4 乗は $1+1+1+1=4$ である.）

(ii) 数 1 は $\mathbb{Z}_n$ を生成する．それゆえ，$\mathbb{Z}_n$ は位数 n の巡回群である．

(iii) $\mathbb{Z}_6$ においては，

$$\begin{aligned}\langle 0 \rangle &= \{0\},\\ \langle 1 \rangle &= \langle 5 \rangle = \mathbb{Z}_6,\\ \langle 2 \rangle &= \langle 4 \rangle = \{0, 2, 4\},\\ \langle 3 \rangle &= \{0, 3\}\end{aligned}$$

となる．例えば，$\langle 4 \rangle$ の元は，4, $4 +_6 4 = 2$, $4 +_6 4 +_6 4 = 0$ である．

(iv) D_3 においては，

$$\begin{aligned}\langle e \rangle &= \{e\},\\ \langle r \rangle &= \langle r^2 \rangle = \{e, r, r^2\},\\ \langle s \rangle &= \{e, s\},\\ \langle rs \rangle &= \{e, rs\},\\ \langle r^2 s \rangle &= \{0, r^2 s\}\end{aligned}$$

となる．

2 面体群 D_n は巡回群ではないが，その元の各々は 2 つの元 r と s で書き表せる．これを，元 r と s で D_n を生成する，という．X を空ではない，G の部分集合とする．$x_1, x_2, \ldots, x_k$ は X に属する元（必ずしも異なるとは限らない）とし，$m_1, m_2, \ldots, m_k$ を整数とするとき，次の形に表された元

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_k^{m_k} \qquad (*)$$

は X の元による**語**と呼ばれる．これら語のすべての集まりは G の**部分群**となる．(2 つの語が与えられたとき，1 つの語の後ろにもう 1 つの語を書くことは，X の元による 2 つの語の積は再び X の元による語となることを示している．G の単位元は，X の任意の元 x に対する語 x^0 と考えることができる．そして，

$$\text{語 } x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_k^{m_k} \text{ の逆元は } x_k^{-m_k} \cdots x_2^{-m_2} x_1^{-m_1} \text{ である．}$$

これはまた X の元による語となっている．）この部分群は **X によって生成される部分群**と呼ばれる．もしこれが G の元すべてを与えるならば，**X は G に対する生成元の集合である**あるいは **X の元は G を生成する**という．X が G に対する生成元の集合とし，Y を G の別の部分集合とする．このとき，もし Y が X を含むならば，Y もまた G に対する生成元の集合となる．より一般に，もし X のすべての元が Y の元の語として書き表せるならば，このとき，Y は G に対する生成元の集合となる．

例.

(i) 元 r と s で D_n を生成する．2 つの生成元のこの選び方は 1 通りではない．例えば，rs と s でまた D_n を生成する．なぜならば，$r = (rs)s$ であり，それゆえ，r と s によるどのような語も rs と s による語に変換されるからである．

(ii) $\mathbb{C}$ の群構造は，複素数の足し算である．つまり，結果として，語は整数を係数とする線形結合 $m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_k z_k$ と書き表される．$\{1, i\}$ によって生成される部分群はガウスの整数であり，その元は複素数 $a + ib$ となる．ここで，$a, b \in \mathbb{Z}$ である．

(iii) 実数軸とその上に図 5.2 に描かれているように印を付けられた整数の集合を考える．実数軸を実数軸に写し，距離を保ち，整数を整数に写すような関数のなす集合を G とする．すると，G は関数の合成により群をなす．G の各元は，左方向あるいは右方向への（0 以上の）整数分の距

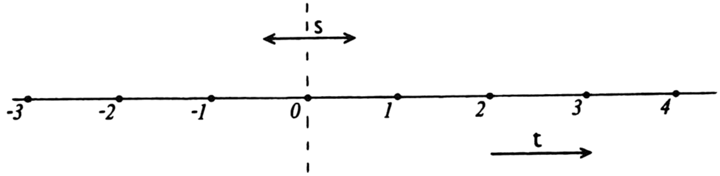


図 5.2

離の平行移動であるか，整数点における反転であるか，2 つの整数の中点における反転であるかのいずれか 1 つであることを確かめることは難しくはない（演習問題 5.9）．t を右方向に 1 の平行移動とする．つまり，$t(x) = x + 1$ となる．s を原点における反転とする．つまり，$s(x) = -x$ となる．このとき，G の元は，

$$\ldots,\ t^{-2},\ t^{-1}, e,\ t,\ t^2,\ \ldots,$$
$$\ldots,\ t^{-2}s,\ t^{-1}s,\ s,\ ts,\ t^2s,\ \ldots \qquad (**)$$

となる．ここで，e は恒等関数[1]である．例えば，$t^{-2}(x) = x - 2$ であり，t^{-2} は左方向に 2 の平行移動を意味している．$ts(x) = t(-x) = -x + 1$ であり，ts は点 $\frac{1}{2}$ における反転を意味する．平行移動 t と反転 s で G を生成している．同値なことであるが，2 つの反転 ts と s で G を生成している．

$$st(x) = s(x + 1) = -x - 1,$$
$$t^{-1}s(x) = t^{-1}(-x) = -x - 1$$

であることに注目しよう．これは，$st = t^{-1}s$ を意味する．$s^2 = e$ かつ $st = t^{-1}s$ であるから，リスト (**) から 2 つの元を任意に選び，掛け合わせることができ，積を同じ形に変形することができる．これは D_n のときを非常によく思い出させる．実際，唯一の違いは，位数 n の回転 r が，無限位数を持つ平行移動 t に置き換えられてしまっていることである．このため，G は**無限 2 面体群** (infinite dihedral group) と呼ばれ，D_∞ と表される．

この章を部分群に関するいくつかの有用な事実で締めくくろう．

[1] ［訳注］任意の実数 x に対して，$e(x) = x$ となる関数を意味する．

(5.1) 定理. 群 G の空でない部分集合 H が G の部分群であるための必要十分条件は，x と y がともに H に属するときはいつでも xy^{-1} が H に属することである．

証明. もし H が部分群であり，$x, y \in H$ であるならば，このとき，y^{-1} は H に入らなければならないから，積 xy^{-1} は H に属する．逆に，H が空でなく，$x, y \in H$ のときはいつでも $xy^{-1} \in H$ となるとする．もし，$x \in H$ であれば，$e = xx^{-1} \in H$ となり，$x^{-1} = ex^{-1} \in H$ となる．最後に，もし y もまた H の元であるならば，上のように $y^{-1} \in H$ であり，それゆえ，$xy = x(y^{-1})^{-1} \in H$ となる．よって，H は，G の部分群となる．□

(5.2) 定理. 群の 2 つの部分群の共通部分もまた部分群となる．

証明. H と K を群 G の部分群とする．単位元は H と K の両方ともに含まれているので，それゆえ $H \cap K$ は空ではない．もし，x と y が共通部分 $H \cap K$ の元であるならば，それらは H の元でもあるし，K の元でもある．H, K は部分群なので，積 xy^{-1} は H と K の両方に属する．よって，$xy^{-1} \in H \cap K$ となり，定理 (5.1) を適用できる．□

(5.3) 定理. (a) $\mathbb{Z}$ のどの部分群も巡回群である．
(b) より強く，巡回群のどの部分群も巡回群である．

(a) の証明. H を $\mathbb{Z}$ の部分群とする．もし，$H = \{0\}$ ならば，H は巡回群である．もし，$H \neq \{0\}$ ならば，H は 0 でない整数 x を含む．H は部分群なので，$-x$ もまた H に含まれなければならない．それゆえ，H は正の整数を含むことになる．d を H に含まれる最小の正の整数とする．d が H を生成することを主張しよう．もし $n \in H$ ならば，n を d で割って，$n = qd + m$ となる．ここで，q と m は整数で，$0 \leq m < d$ を満たすものである．すなわち，$m = n \pmod d$．$n \in H$ かつ $d \in H$ であることはわかっている．H は部分群であるので，$qd \in H$ である．それゆえ，$-qd \in H$ となる．したがって，

$$m = n - qd = n + (-qd)$$

は H に属する．これは m が 0 でない限り，d の選び方に矛盾する．結果として，$n = qd$ を得る．このことは，H の各元は定理の主張にあるように d の整数倍となることを示している．□

(b) の証明. G を巡回群とし，K を G の自明な群 $\{e\}$ とは異なる部分群と

する．もし x が G の生成元であるならば，G のすべての元，ゆえに，K のすべての元は x のべき乗となる．$H = \{n \in \mathbb{Z} | x^n \in K\}$ とする．H が $\mathbb{Z}$ の部分群であることは容易に確かめられる．(a) により，H は巡回群であり，d が H を生成するならば，x^d は K を生成する．これで証明が完成した． □

演習問題

5.1. $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{12}, D_4, D_5$ の各群の部分群をすべて見つけよ．

5.2. m と n を正の整数とし，m が n の約数であるとき，$\mathbb{Z}_n$ は位数 m の部分群を含むことを示せ．$\mathbb{Z}_n$ は位数 m の部分群を 1 つ以上含むか？

5.3. 4 章の記号を使う．rs と r^2s で D_n を生成することを確かめよ．

5.4. r^2 と r^2s によって生成される D_n の部分群を見つけよ．このとき，n が奇数のときと n が偶数のときとによって違いがあることに十分注意を払うこと．

5.5. H を群 G の空でない有限な部分集合とする．H が G の部分群となることの必要十分条件は，x と y が H に属するときはいつでも xy は H に属することであることを証明せよ．

5.6. 正 6 角形の中に 1 本の対角線を引く．この対角線を動かさないような正 6 角形の平面的な対称性と，この対角線を自分自身に写すような正 6 角形の平面的な対称性をそれぞれ列挙せよ．これらどちらの対称性の集まりも正 6 角形のすべての平面的な対称性のなす群の部分群となることを示せ．

5.7. G をアーベル群とし，H を有限位数を持つ G の元の集まりとする．H は G の部分群となることを証明せよ．

5.8. 無限 2 面体群のうち，どの元が有限位数を持つか？ これらの元の集まりは，D_∞ の部分群となるか？

5.9. f を実数軸からそれ自身への関数とし，どの 2 点の間の距離も保ち，整数を整数へ写すものとする．

(a) f はどのような点も固定しないものとする．このとき，f はある正の整数の距離の分だけの**平行移動**であることを示せ．

(b) もし f が 1 点だけを固定するならば，この点は整数であるか，2 つの整数の中点であることを示し，f はこの点を固定するような**反転**であることを示せ．

(c) 最後に，もし f が 1 点より多くの点を固定するならば，f は恒等関数でなければならないことを確かめよ．

5.10. $\mathbb{Z}_{12}$ を生成するような $\mathbb{Z}_{12}$ の元のリストを作成せよ．$\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_9$ についても同様の問に答えよ．自分の答は一般的な結果を示唆しているか？

5.11. $\mathbb{Q}$ は巡回群でないことを示せ．より強く，$\mathbb{Q}$ は有限個の元で生成され得ないことを証明せよ．

5.12. もし $a, b \in \mathbb{Z}$ がともに 0 ではなく，$H = \{\lambda a + \mu b | \lambda, \mu \in \mathbb{Z}\}$ とするとき，H は $\mathbb{Z}$ の部分群であることを示せ．d を H における最小の正の整数とする．d は a と b の最大公約数であることを確かめよ．(結果として，2 つの整数 a, b の最大公約数は，いつでも整数を係数とした線形結合 $\lambda a + \mu b$ と書き表すことができる.)

第6章　置換

置換のなす群を導入して，群の例の蓄えを増やし続けていこう．集合の元を再配置あるいは置換することはよくある発想で，例えば，1と3を入れ替えて，2はそのままにしておくということは，最初の3つの正の整数の置換を与える．任意の集合 X の**置換** (permutation) とは，X からそれ自身への全単射を意味する．集合 X のすべての置換の集まりは，写像の合成により群 S_X をなす．この事実は極めてわずかなことを確かめるだけでわかる．$\alpha : X \to X$ と $\beta : X \to X$ を置換だとすると，$\alpha\beta(x) = \alpha(\beta(x))$ で定義される合成写像 $\alpha\beta : X \to X$ もまた置換である．写像の合成は結合的であり，X のすべての点を動かさないままにするという特別な置換 ε は明らかに単位元として作用している．最後に，各置換 α は全単射であるから，逆写像 $\alpha^{-1} : X \to X$ を持ち，これもまた置換であり，$\alpha^{-1}\alpha = \varepsilon = \alpha\alpha^{-1}$ を満たす．もし X が無限集合であれば，S_X は無限群となる．X が最初の n 個の正の整数で構成されているときは，S_X は S_n と書かれ，次数 n の**対称群** (symmetric group) と呼ばれる．S_n の位数は $n!$ である．

しばらくの間，対称群に専念することとしよう．ここに S_3 の6個の元を挙げよう．

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 123 \\ 123 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 123 \\ 213 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 123 \\ 321 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 123 \\ 132 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 123 \\ 231 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 123 \\ 312 \end{bmatrix}.$$

特定の置換による整数の像を見るには，その真下を見ればよい．つまり，

$$\begin{bmatrix} 123 \\ 312 \end{bmatrix}$$

は，1を3へ，2を1へ，3を2へ写す．$\alpha\beta$ が，**最初に β で写して，次に α を写すことを覚えていれば，**

$$\begin{bmatrix}123\\213\end{bmatrix}\begin{bmatrix}123\\132\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}123\\231\end{bmatrix}$$

と計算でき，その一方で，

$$\begin{bmatrix}123\\132\end{bmatrix}\begin{bmatrix}123\\213\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}123\\312\end{bmatrix} \tag{$*$}$$

となる．ゆえに，S_3 はアーベル群ではない．$n \geq 3$ のとき，S_n はアーベル群でないとすぐさま言うことができる．なぜか？

n の値をより大きなものに拡張するときには，この記法はあまりにも面倒で扱っていくことができない．例えば，S_6 の元 α で，$\alpha(1)=5$, $\alpha(2)=4$, $\alpha(3)=3$, $\alpha(4)=6$, $\alpha(5)=1$, $\alpha(6)=2$ と定められるものは，

$$\alpha=\begin{bmatrix}123456\\543612\end{bmatrix}$$

となる．同じ情報は $\alpha=(15)(246)$ と書くことによって捕らえることができる．各々の一組のかっこの中で，整数はその左隣にある整数へと写され，最後の整数は最も先頭にある整数へと写される．よって，1 は 5 へ，5 は 1 へ写され，2 は 4 へ，4 は 6 へ，6 は 2 へ写される．置換によって固定される整数については，記述する必要はない．ここでは，3 についての記述がない．**どのような置換もこの方法で書き表すことができる．その規定は次のとおりである．** 1 つの左かっこを書いて，次に，与えられた置換で動かされる最小の整数を書く．そして，この整数の置換での像を右に並べて書き，さらにその像の置換での像を続けて右側に並べて書き，これを次々と続ける．やがて出発点となる整数に置換での像が到達してぐるりと 1 周したところで，右かっこを書く．新しい左かっこを書き，これまでに記述されていない整数で，置換によって動かされる最小のものを書き，最初の操作のように続けていく．

例.

(i) $\begin{bmatrix}123456789\\189362754\end{bmatrix}=(2856)(394)$.

(ii) $\begin{bmatrix}12345678\\81673542\end{bmatrix}=(182)(365)(47)$.

(iii) S_3 の元は，

$$\varepsilon, (12), (13), (23), (123), (132)$$

である．

(iv) (*) の計算は，

$$(12)(23) = (123) \text{ となり，一方で，} (23)(12) = (132) \text{ となる．}$$

この新しい記法において，1 組のかっこの中の置換 $(a_1a_2\cdots a_k)$ は**巡回置換** (cyclic permutation) と呼ばれる．これは，a_1 を a_2 へ写し，a_2 を a_3 へ写し，...，a_{k-1} を a_k へ写し，a_k を a_1 へ写し，その他すべての整数は動かさずにおくものである．数 k は巡回置換の長さであり，長さ k の巡回置換は **k-サイクル** (k-cycle) と呼ばれる．2-サイクルは普通**互換** (transposition) といわれる．上の議論は，**S_n のすべての元は，互いに素な巡回置換の積として書いてよい**，ということを示している．ここで，互いに素とは，1 つの整数が置換によって動かされるときは，これらの巡回置換の唯 1 つだけを使って動かされる，ということを意味する[1]．

例 (i) を再び見てみよう．この例では，(2856) と (394) となっている．これらのうちの最初のものは，整数 2, 5, 6, 8 だけに影響を与えており，2 番目のものは，3, 4, 9 だけを動かす．これらの巡回置換は互いに素なので，これらは互いに**可換**である．つまり，$(2856)(394) = (394)(2856)$ となる．もちろん，これについては一般的な結果がある．α と β が S_n の元であり，α と β の両方によって動かされる整数がないならば，$\alpha\beta = \beta\alpha$ となる．S_n の元の互いに素な巡回置換の積への分解は，これらの巡回置換を書く順序を除いて，一意的である．

(6.1) 定理． S_n の互換は S_n を生成する．

証明． S_n の各元は，巡回置換の積として書くことができ，任意の巡回置換は，互換の積で書くことができる．なぜならば，

$$(a_1a_2\cdots a_k) = (a_1a_k)\cdots(a_1a_3)(a_1a_2)$$

となるからである．それゆえ，S_n の各元は互換の積で書くことができる．これらの互換は互いに素である必要はなく，この分解は一意的ではないことに注意せよ．□

例．

$$\begin{bmatrix}123456\\543612\end{bmatrix} = (15)(246) = (15)(26)(24).$$

[1] ［訳注］つまり，使用される以外のその他の巡回置換には，この整数は含まれないということ．

$(246) = (624)$ なので，同様に，

$$\begin{bmatrix} 123456 \\ 543612 \end{bmatrix} = (15)(624) = (15)(64)(62) = (15)(46)(26)$$

となる．

(6.2) 定理． (a) 互換 $(12), (13), \ldots, (1n)$ は S_n を生成する．
(b) 互換 $(12), (23), \ldots, (n-1\ n)$ は S_n を生成する．

証明． (a) $(ab) = (1a)(1b)(1a)$ であることに注目して，(6.1) を使えばよい．
(b) $(1k) = (k-1\ k)\cdots(34)(23)(12)(23)(34)\cdots(k-1\ k)$ であることに注目して，(a) を使えばよい．　□

(6.3) 定理． 互換 (12) と n-サイクル $(12\cdots n)$ は S_n を生成する．

証明． (6.2) (b) により，語として $(k\ k+1)$ の形の各互換に対してだけ，これらを (12) と $(12\cdots n)$ を用いて書き表せばよい．これは次のようにして，達成される．

$$(23) = (12\cdots n)(12)(12\cdots n)^{-1}$$

である．より一般に，

$$(k\ k+1) = (12\cdots n)^{k-1}(12)(12\cdots n)^{1-k}$$

が，$2 \leq k < n$ に対して成り立つ．　□

S_n の与えられた元は互換の積として多くの異なる方法で書き下すことができる．しかしながら，**使われる互換の数は常に偶数であるか常に奇数かのいずれか一方なのである．**このことを確かめるために，次の多項式を導入しよう．

$$\begin{aligned} P &= P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n)(x_2 - x_3)\cdots(x_{n-1} - x_n). \end{aligned}$$

つまり，$1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ **かつ** $i < j$ となる $(x_i - x_j)$ のすべての積である．もし，$\alpha \in S_n$ ならば，αP を $(x_{\alpha(i)} - x_{\alpha(j)})$ のすべての積として定める．ここで，再び，$1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i < j$ である．α の効果は，P の項を置換することであり，一方，それと同時に，それらの項いくつかの符号

を変えることでもある．それゆえ，αP は，$+P$ か $-P$ のいずれか一方であり，これが，いわゆる，置換 α の**符号**を定める．つまり，前者の場合は，符号は $+1$ となり，後者の場合は -1 となる．はっきりと理解するために，ここで 1 つ例を挙げよう．

例． $n = 3, \alpha = (132)$．このとき，

$$P = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \text{ であり，}$$

$$\alpha P = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_2) = +P$$

となる．したがって，(132) の符号は，$+1$ となる．

一般に，$\alpha, \beta \in S_n$ であるとき，$\alpha\beta$ の符号は，α の符号と β の符号の積となり，互換 (12) の符号は明らかに -1 である．$a > 2$ なら，$(1a) = (2a)(12)(2a)$ なので，$(1a)$ の符号もまた -1 となる．そして $(ab) = (1a)(1b)(1a)$ なので，任意の互換の符号は -1 である．結果として，S_n の元が偶数個の互換の積として書けているならば，その元の符号は必ず $+1$ であり，一方，奇数個の互換の積については常に符号は -1 となる．

S_n の元で，偶数個の互換の積で表されるものは**偶置換** (even permutation) と呼ばれ，その他のものは，**奇置換** (odd permutation) と呼ばれる．

$$(a_1 a_2 \cdots a_k) = (a_1 a_k) \cdots (a_1 a_3)(a_1 a_2)$$

であるから，巡回置換が偶置換であるのは，その長さが奇数のときに限る．

(6.4) 定理． S_n の偶置換全体は位数 $n!/2$ の部分群をなす．これを次数 n の**交代群** (alternating group)A_n という．

証明． α と β が偶置換であるとき，これらの各々を偶数個の互換の積として書き下す．これらの積を並べたものは $\alpha\beta$ が偶置換であることを示している．α を互換の積で表したものを逆の順序で書き表したものは，α^{-1} が偶置換であることを示している．単位元は，$\varepsilon = (12)(12)$ であるから，もちろん，偶置換である．それゆえ，偶置換全体は S_n の部分群をなす．α が偶置換であれば，$(12)\alpha$ は奇置換となる．このことは，S_n の元は 2 つに分類され，そのうちのちょうど半分は偶置換となることを示している．(なぜすべての奇置換は，偶置換に続けて (12) を施した形に表されるのか？) □

(6.5) 定理． $n \geq 3$ に対して，3-サイクルは A_n を生成する．

証明. 各3-サイクルは，確かに偶置換である．A_n の元が与えられたとき，(6.2a) を使って，その元を $(1a)$ の形の偶数個の互換の積として書くことができる．これらの互換を集めて隣接した互換との組を作る．そして，$(1a)(1b) = (1ba)$ を使って，この各組を掛け合わせる．与えられた元は，今や3-サイクルの積として表された．□

$\boldsymbol{A_4}$ **の12個の元は，**

$$\begin{array}{llll} \varepsilon, & (12)(34), & (13)(24), & (14)(23), \\ (123), & (124), & (134), & (234), \\ (132), & (142), & (143), & (243) \end{array}$$

となる．S_4 の残りの元，つまり，奇置換は，

$$\begin{array}{lll} \multicolumn{3}{l}{(12),(13),(14),(23),(24),(34),} \\ (1234), & (1243), & (1324), \\ (1432), & (1342), & (1423) \end{array}$$

となる．もし，(13)(24) を3-サイクルの積として書きたければ，(6.5) にある手順を使えば，

$$\begin{aligned} (13)(24) &= (13)(12)(14)(12) \\ &= (123)(124) \end{aligned}$$

となる．

演習問題

6.1. S_3 に関する乗法表を書き出せ．

6.2. S_8 の次の各元を互いに素な巡回置換の積として表し，また互換の積として表せ．

(a) $\begin{bmatrix} 12345678 \\ 76418235 \end{bmatrix}$　(b) (4568)(1425)

(c) (624)(253)(876)(45)

もしあれば，これらの置換のうち A_8 に属するものはどれか？

6.3. S_9 の元のうち，数の集まり 2, 5, 7 をまた同じ集まりへ写すものは，S_9 の部分群をなすことを示せ．この部分群の位数はいくつか？

6.4. S_4 の部分群で，6個の元を含むものを見つけよ．S_4 の中に位数6の部分群はいくつあるか？

6.5. $\alpha = (143)$ と $\alpha = (23)(412)$ のとき，$\alpha P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ を計算せよ．

6.6. H を S_n の部分群とし，H が A_n に含まれないならば，H の元のちょうど半分は偶置換であることを証明せよ．

6.7. n が最小でも 4 ならば，S_n のすべての元は各々の位数が 2 である 2 つの置換の積として表すことができることを示せ.（まず最初に巡回置換で実験してみよ.）

6.8. α, β が S_n の元であれば，$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ は常に A_n の元となることを，また，β が偶置換であるときはいつでも，$\alpha\beta\alpha^{-1}$ は A_n に属することをそれぞれ確かめよ．これらの元を，$n = 4$, $\alpha = (2143)$, $\beta = (423)$ のときに，実際に計算してみよ．

6.9. n が奇数のとき，(123) と $(12 \cdots n)$ で A_n を生成することを示せ．もし n が偶数ならば，(123) と $(23 \cdots n)$ で A_n を生成することを示せ．

6.10. $\alpha, \beta \in S_n$ で，$\alpha\beta = \beta\alpha$ であるならば，β は α によって固定される整数を置換することを証明せよ．α が n-サイクルのとき，β は α のべき乗でなければならないことを示せ．

6.11. 演習問題 6.2 にある各置換の位数を求めよ．

6.12. S_n の元 α の位数は，α を互いに素な巡回置換の積として書いたときに得られるサイクルの長さの最小公倍数であることを証明せよ．

第7章　同型写像

チェス盤（図 7.1）には 4 つの平面的な対称性がある，恒等変換 e, 盤の中心に関する π 回転 r，そして 2 つの対角線に関する反転 q_1, q_2 である．これらは対称性の合成の下で群をなす．その乗法表は下に与えられている．8 を法とした積により数 1, 3, 5, 7 は群をなすことが簡単に確かめられる．この群に対応する乗法表も与えよう．

	e	r	q_1	q_2
e	e	r	q_1	q_2
r	r	e	q_2	q_1
q_1	q_1	q_2	e	r
q_2	q_2	q_1	r	e

	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

どこから得たのかは別として，これらの 2 つの表の間には明らかに似た点がある．各々の場合において，群は 4 つの元からなり，これらの元は同じようにして掛け合わせて得られる．名前の付け方だけが，互いの表を区別できる唯一の方法である．

最初の群を G と名付け，2 番目の群を G' と名付け，次の対応

$$e \to 1,\quad r \to 3,\quad q_1 \to 5,\quad q_2 \to 7$$

を $x \to x'$ と表すことにする．元は同じようにして掛け合わせられる，というときは，$x \to x', y \to y'$ ならば，$xy \to x'y'$ となるときを意味する．この対応は，群 G と G' の間の同型写像と呼ばれる．これは全単射であり，群 G の積を G' の積へと写す．事実上，G と G' は「同じ」なのである．専門的には，これらの群は次の意味で同型である．

G から G' への全単射 φ がすべての $x, y \in G$ に対して，$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ を満たすとき，2 つの群 G と G' は同型 (isomorphic) であるという．写像 φ

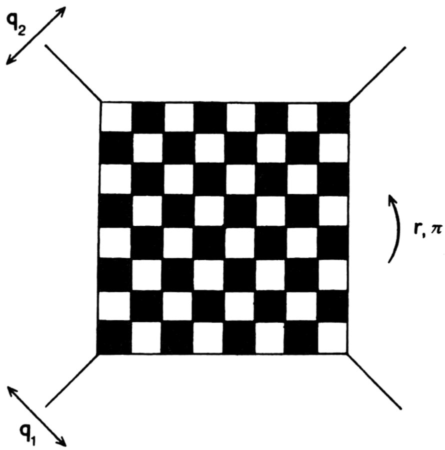


図 7.1

は G と G' の間の**同型写像** (isomorphism) と呼ばれる．

G から G' への全単射 φ を要求することは，G と G' のそれぞれのもととなる集合が同じ大きさであることを保証する．加えて，G のどのような 2 つの元 x, y に対しても，$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ となるならば，最初に G の 2 つの元を掛け合わせて，その積を φ を使って G' へ写すのと，最初に，別々に φ でそれぞれの元を G' へ写して，そこで掛け合わせても，結果は同じであるから，気にする必要はない．それゆえ，G' は実際は単に G を変装したものにすぎない．逆写像 $\varphi^{-1} : G' \to G$ は同様に同型写像となることに注目しよう．それゆえ，私たちの定義は G と G' に対して対称的である．2 つの群 G と G' が同型であることを指し示すために，$G \cong G'$ と書くことにしよう．

例.

(i) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathrm{pos}}$ を $\varphi(x) = e^x$ と定める．すると，φ は全単射であり，

$$\varphi(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = \varphi(x)\varphi(y)$$

がすべての $x, y \in \mathbb{R}$ について成り立つ．それゆえ，$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^{\mathrm{pos}}$ は同型な群である．$\mathbb{R}$ における群の操作は加法的であり，一方，$\mathbb{R}^{\mathrm{pos}}$ においては乗法的であることを思い出そう．

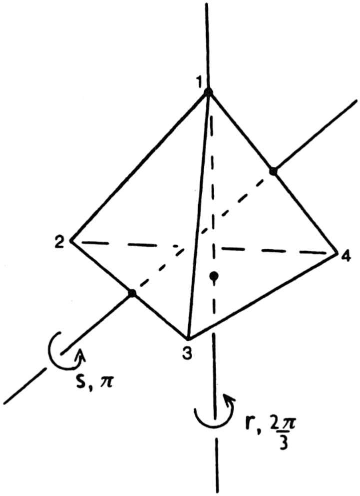


図 7.2

(ii) 私たちは正 4 面体の取り扱いについてすでによく知っている．正 4 面体は，12 の回転対称性を持ち，これらは非可換群 G をなす．より多くのことを次のように学ぶことができる．図 7.2 にあるように，頂点に 1, 2, 3, 4 と番号を振る．各回転対称性は，頂点の置換を誘導し，それゆえ，最初の 4 つの正の整数の置換を誘導する．例えば，図に描かれている回転 r は巡回置換 (234) を誘導し，s は (14)(23) を誘導する．他のすべての可能性について体系的に対応付けを行えば，A_4 の 12 の元を見つけることができる．もし，2 つの回転 u, v がそれぞれ置換 α, β を誘導したならば，uv は明らかに $\alpha\beta$ を誘導する．それゆえ，対応

$$\text{回転対称性} \longrightarrow \text{誘導された置換}$$

は，G が A_4 に同型であることを示している．

(iii) 任意の無限巡回群は $\mathbb{Z}$ に同型である．もし，G が無限巡回群で，x が G を生成しているならば，$\varphi : G \to \mathbb{Z}$ を $\varphi(x^m) = m$ と定める．このとき，φ は全単射であり，

$$\varphi(x^m x^n) = \varphi(x^{m+n}) = m + n = \varphi(x^m) + \varphi(x^n)$$

となる．これにより，φ が同型写像であることが示された．

(iv) 位数 n の任意の有限巡回群は $\mathbb{Z}_n$ に同型である．G が位数 n の巡回群で，x が G を生成するならば，$\varphi : G \to \mathbb{Z}_n$ を $\varphi(x^m) = m \pmod n$ と定める．すると，φ は同型写像である．

(v) 数 $1, -1, i, -i$ は複素数の積で群をなす．これは巡回的で，$i, -i$ がともに生成元である．(iv) における手順はこの群と $\mathbb{Z}_4$ の間の 2 つの同型写像を与える．

$$1 \mapsto 0, \quad i \mapsto 1, \quad -1 \mapsto 2, \quad -i \mapsto 3, \quad \text{と}$$
$$1 \mapsto 0, \quad -i \mapsto 1, \quad -1 \mapsto 2, \quad i \mapsto 3.$$

(vi) D_3 と S_3 は同型である．正 3 角形の頂点に 1, 2, 3 の番号を振ることにより，正 4 面体に対する計算のときの考えに則って，このことを示せ．

(vii) $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Q}^{\mathrm{pos}}$ の間には同型写像は存在しない．というのも，$\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^{\mathrm{pos}}$ が候補であるとしよう．$x \in \mathbb{Q}$ を $\varphi(x) = 2$ となるように選ぶと，

$$\varphi\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = 2$$

となり，$\varphi(x/2)$ は $\sqrt{2}$ でなければならない．$\sqrt{2}$ は無理数だから，矛盾を得た．

同型写像 $\varphi : G \to G'$ は全単射であるから，それゆえ，G と G' は同じ位数を持たなければならない．同型写像は，G の単位元を G' の単位元へ写す． というのも，$x \in G'$，$\varphi(x) = x'$ と仮定すると，

$$x'\varphi(e) = \varphi(x)\varphi(e) = \varphi(xe) = \varphi(x) = x'$$

となり，同様に $\varphi(e)x' = x'$ となるから，これは $\varphi(e)$ が G' の単位元であることを示す．これとは別に，

$$\varphi(e)\varphi(e) = \varphi(ee) = \varphi(e)$$

であることが観察できる．すると，この式の両辺に G' における $\varphi(e)$ の逆元を掛ける．後者の議論は最初のものよりも好ましい．なぜならば，後者の議論では，φ が全単射であることを使わず，φ が G の積を G' の積へ写すことだけを使っているからである．

同型写像 φ は，次の意味で逆元を逆元へ写す．

$$\text{すべての } x \in G \text{ に対して，} \varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1}).$$

再び，これは簡単に確かめることができる．

$$\varphi(x^{-1})\varphi(x) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(e) = e$$

となり，同様に $\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = e$ となる．それゆえ，$\varphi(x^{-1})$ は実際に，G' における $\varphi(x)$ の逆元である．**もし，G がアーベル群ならば，G' もそうである．**というのも，$x', y' \in G'$ とし，$\varphi(x) = x'$, $\varphi(y) = y'$ ならば，

$$\begin{aligned} x'y' = \varphi(x)\varphi(y) &= \varphi(xy) \\ &= \varphi(yx) \quad G \text{ がアーベル群だから} \\ &= \varphi(y)\varphi(x) = y'x' \end{aligned}$$

となるから．

もし，$\varphi : G \to G'$ が同型写像で，H が G の部分群ならば，$\varphi(H)$ は G' の部分群である．このことを (5.1) を使って確かめる．x', y' が $\varphi(H)$ の元とすると，$x, y \in H$ で $\varphi(x) = x'$, $\varphi(y) = y'$ となるものを見つけることができる．今，H が G の部分群であるから，xy^{-1} は H に属する．それゆえ，

$$\varphi(xy^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)^{-1} = x'(y')^{-1}$$

なので，$x'(y')^{-1}$ は，必要とされていたように，$\varphi(H)$ に属する．特別な場合として，H が巡回群で，G の元 g で生成されているときを考えよう．$x' \in \varphi(H)$ ならば，$x' = \varphi(g^m) = \varphi(g)^m$ となるある整数 m がある．それゆえ，$\varphi(H)$ は元 $\varphi(g)$ によって生成される．H と $\varphi(H)$ は同じ個数の元を持つから，$\varphi(g)$ の位数は g の位数と同じでなければならない．**それゆえ，同型写像は各元の位数を保つ．** 最後に，もし $\varphi : G \to G'$ と $\psi : G' \to G''$ がともに同型写像であれば，このとき合成写像 $\psi\varphi : G \to G''$ もまた同型写像である．

1章で私たちは3つの立体を紹介した：正4面体，平坦な正6角形の板，正12角錐．これらの立体は対称性の数が異なるという**幾何学的考察**は，これらのどの2つも同型な対称性の群を持たないという**代数的な主張**に翻訳される．私たちは正4面体の回転対称性のなす群が A_4 と同型であることをまさに示したところである．正6角形の板の対称性のなす群は定義により，D_6 であり，正12角錐のそれは，(唯1つの対称性の軸に関する $\pi/6$ 回転によって生成される）巡回群であり，それゆえ，$\mathbb{Z}_{12}$ と同型でなければならない．これらの3つの群の中で，$\mathbb{Z}_{12}$ が唯一のアーベル群で，それゆえ，他の2つと同型にはなり得ない．そして，D_6 は A_4 と違って，位数6の元を含むから，D_6 は A_4 と同型になり得ない．

演習問題

7.1. 数 1, 2, 4, 5, 7, 8 は 9 を法とする積で群をなすことを確かめよ．また，この群は $\mathbb{Z}_6$ に同型であることを示せ．

7.2. 数 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19 は 20 を法とする積で群をなすことを確かめよ．この群が $\mathbb{Z}_8$ と同型でない理由を説明せよ．

7.3. A_4 の部分群 $\{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ はチェス盤の平面的な対称性のなす群と同型であることを示せ．

7.4. S_3 と D_3 の間の具体的な同型写像を作れ．S_3 と D_3 の間には，いくつの異なる同型写像があるか？

7.5. G を群とする．対応 $x \leftrightarrow x^{-1}$ が G から G への同型写像となるための必要十分条件は，G がアーベル群であることを示せ．

7.6. $\mathbb{Q}^{\mathrm{pos}}$ は $\mathbb{Z}$ と同型でないことを証明せよ．

7.7. G が群で，g が G の元ならば，$\varphi(x) = gxg^{-1}$ によって定められる写像 $\varphi: G \to G$ は同型写像であることを示せ．G が A_4 で，g が置換 (123) であるとき，上の同型写像を書き下せ．

7.8. H が G の**真部分群** (proper subgroup) であるとは，H が G の部分群で，$\{e\}$ でも G でもないときをいう．自分自身の真部分群の 1 つと同型となる群を見つけよ．

7.9. G が巡回群とする．もし x が G を生成し，$\varphi: G \to G$ が同型写像ならば，φ は $\varphi(x)$ によって完全に決定されること，さらに $\varphi(x)$ は G も生成することを証明せよ．これらの事実を使って，$\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への同型写像をすべて見つけよ．また，$\mathbb{Z}_{12}$ から $\mathbb{Z}_{12}$ へのすべての同型写像を見つけよ．

7.10. $\mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ とは同型でないことを示せ．また，$\mathbb{R} - \{0\}$ は $\mathbb{Q} - \{0\}$ に同型でないことを示せ．$\mathbb{R}$ は $\mathbb{R} - \{0\}$ と同型であるか？

7.11. S_6 の部分群で，(1234) と (56) によって生成されるものは，演習問題 7.2 に記述されている群に同型であることを証明せよ．

7.12. S_4 の部分群で，(1234) と (24) によって生成されるものは，D_4 に同型であることを示せ．

第8章　プラトンの立体とケイリーの定理

5つの凸な正多面体がある[1]：**正4面体** (tetrahedron)（4個の正3角形の面），**正6面体** (cube)（6個の正方形の面），**正8面体** (octahedron)（8個の正3角形の面），**正12面体** (dodecahedron)（12個の正5角形の面），**正20面体** (icosahedron)（20個の正3角形の面）．これらは図8.1に描かれている．正4面体の回転対称性のなす群が交代群 A_4 に同型であることはすでに示してある．この章では，他の4つの立体に関して，類似の結果を作り出そう．

正6面体は，24個の回転対称性を持つ．これらは正4面体のときと同様にして数え上げられる．つまり，対称性の軸をすべて見つけ出し，それとともに各軸について異なる回転の数を見つけるのである．異なる形式の軸は図8.2に L, M, N と表されている．L のような軸は3本あり，合計で9個の回転対称性を与える．M の形式の6本の軸は，各軸について1つの回転を持ち，N のような4本の主対角線の各々について，正6面体を $2\pi/3$, $4\pi/3$ 回転させることができる．これらすべてで23の恒等的ではない対称性となる．

正6面体の各頂点に番号を振って，正6面体の群から S_8 の部分群への同型写像を作ることができるだろう．よりよい考察としては，各回転対称性は正6面体の4本の主対角線を置換することである．この事実を使って，正6面体の対称性のなす群が S_4 と同型であることを示そう．上に示したように，正6面体の角に番号を付け，N_k を角 k と k' を結ぶ対角線としよう．ここで，$1 \leq k \leq 4$ である．各回転対称性は，N_1, N_2, N_3, N_4 を互いに置換し，結果として，数1, 2, 3, 4の置換を与える．例えば，図8.2を見ると，r は N_1 を N_2 へ，N_2 を N_3 へ，N_3 を N_4 へ，そして N_4 を N_1 へ写している．これは4-サイクル (1234) を与える．s は (143) を誘導する．t によって，対角

---

[1] ［訳注］これら5つの凸正多面体はプラトン (Plato) の立体とも呼ばれる．

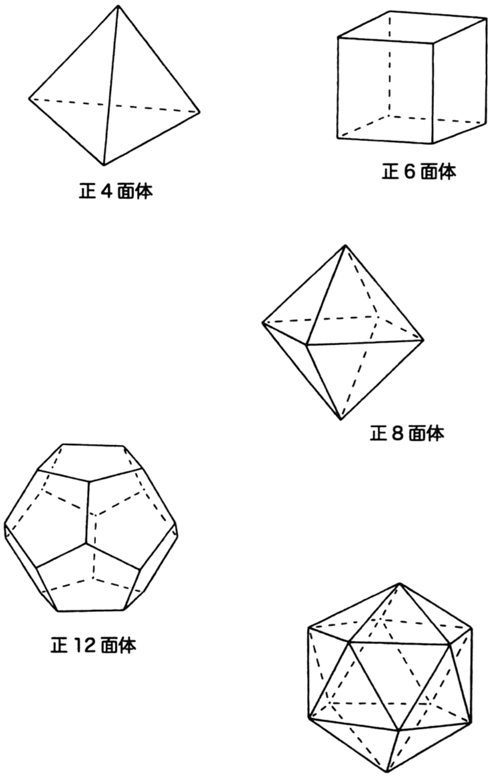


図 8.1

線 N_1 と N_2 は互いに入れ替わり，一方で，N_3 と N_4 は自分自身へと写される（これらは動かされないのではないものの，各々の端点が入れ替わるのである）．したがって，t は互換 (12) を与える．正 6 面体の対称性のなす群を G と書き，上に構成した写像 を $\varphi : G \to S_4$ と書く．2 つの回転の積は，置換の適切な積を誘導することは明らかであるから，あとは φ が全単射であることを確かめればよい．

これはもちろん消去法によって確かめられる．別の言葉でいえば，正 6 面

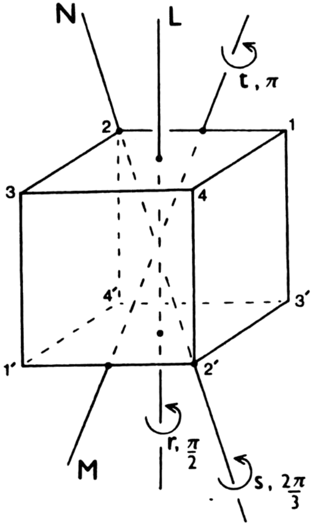


図 8.2

体における4本の対角線に関する各々の1つの回転の効果を求めること，というかなり面倒な手順である．一方，同じ元の個数を持つ2つの有限集合の間の全射は全単射でなければならないことを覚えている．だから，φ が全射であることを示そう．しかし，これは簡単なことである．(1234) と (12) はともに $\varphi(G)$ に属し，$\varphi(G)$ は S_4 の部分群である．なぜならば，φ は G の積を S_4 の積に写しているからである．それゆえ，(1234) と (12) によって形成することができるどのような語も，$\varphi(G)$ に属さなければならない．(1234) と (12) で S_4 のすべての元を生成するから，$\varphi(G) = S_4$ を得る．これで議論は終了である．

正6面体の隣り合う2面の各組の中心を結ぶことで，正6面体の内部に**正8面体**を作ることができる（図 8.3）．正8面体上で，正6面体上で行ったのと同じ操作を施すと，正8面体の内部に正6面体を作れる．このとき，正6面体と正8面体は**双対な** (dual) 立体であるという．これらは明らかに同じ分だけの対称性を持つ．正6面体の任意の対称性は，内部にある双対な正8面体の対称性であり，その逆も成り立つ．これ以上余計なことをいわなくても，正6面体の回転対称性のなす群と正8面体のそれは同型であるということが

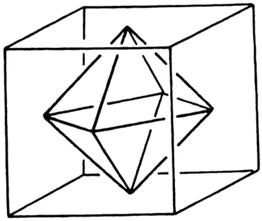


図 8.3

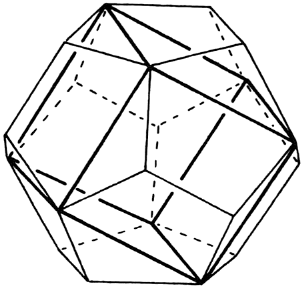


図 8.4

できる．

あともう 2 つ正多面体がある．**正 12 面体**と**正 20 面体**である．これらは互いに双対の関係にある．読者はこれをぜひ確かめてほしい．よって，回転対称性のためには，これらの立体のうちのどちらか 1 つを調べれば十分である．例えば，正 12 面体を見てみよう．図 8.4 は正 12 面体の内部の正 6 面体を示している．この正 6 面体の各頂点は，正 12 面体の頂点であり，各辺は正 5 角形の 1 つの面の対角線である．特定の正 5 角形を見てみれば，5 本の対角線のうち，ちょうど 1 本だけが正 6 面体の辺になっている．この対角線については何も特別なことはないし，もちろん，この正 5 角形の残りのどの 4 本の対角線にも対応して内部にあともう 4 つ正 6 面体があることはいうまでもない．これら 5 つの正 6 面体は正 12 面体のすべての回転対称性によって置換される．これらを使えば，1 つの正 6 面体の対称性を見るのに主対角線を使ったように，正 12 面体の回転対称性のなす群は A_5 に同型であることを確かめることは難しくはない．次の手順を示唆して，詳細については読者に委

ねよう．

(i) 正12面体の回転対称性の数を数えて，それらが60あることを示せ．
(ii) A_5 の位数が60であることに注目せよ．
(iii) 上に述べた正12面体の内部にある正6面体に1から5の番号を付け，正12面体の各回転が S_5 の元を生み出すようにせよ．
(iv) 向かい合う頂点の組を結ぶ軸についての回転を考えることにより，S_5 の中のすべての3-サイクルがこのようにして得られることを示せ．
(v) S_5 の3-サイクルは部分群 A_5 を生成することを思い出せ．

私たちの結果を次のようにまとめよう．**正4面体の回転対称性は A_4 に同型である．正6面体と正8面体はともに S_4 に同型な回転対称性を持つ．正12面体と正20面体はともに A_5 に同型な回転対称性を持つ．** これらすべての群は回転対称性だけを含むことを強調しておく．正4面体のすべての対称性の群は，下記の演習問題で求められる．その他の正多面体に関しては，10章にて取り扱われる．

これまで，置換の群として，正多面体の対称性のなす群を示してきた．ここで，**すべての群は置換のなす群の部分群に同型である**ことを示そう．

(8.1) ケイリーの定理． G を群とする．このとき，G は S_G の部分群に同型である．

証明． G の各元 g は $L_g(x) = gx$ で定められる置換 $L_g : G \to G$ を与える．(L_g は単射である．なぜならば，$L_g(x) = L_g(y)$ ならば，$gx = gy$ であり，$g^{-1}gx = g^{-1}gy$ により，$x = y$ を得るからである．L_g はまた全射でもある．というのも，$z \in G$ とすれば，$L_g(g^{-1}z) = gg^{-1}z = z$ となるからである．) L_g は g **による左移動**と呼ばれる．$G = \mathbb{R}$ のときには，L_g は実際に距離 g の分だけの平行移動であることに注意せよ．G' を S_G の部分集合 $\{L_g | g \in G\}$ とする．S_G における積は写像の合成であるから，すべての $x \in G$ に対して，

$$L_g(L_h(x)) = L_g(hx) = ghx = L_{gh}(x)$$

となる．それゆえ，G' の2つの元の積は G' に属する．S_G の単位元 ε は G' に属する．なぜなら，これは L_e に等しいからである．さらに，S_G における L_g の逆元は $L_{g^{-1}}$ であり，これはまた G' に属する．これにより，G' は S_G の**部分群**となる．G と G' の間の対応は $g \to L_g$ により定められ，これは確かに全射である．また，この対応により，$gh \to L_{gh} = L_g L_h$ であるから，G

の積は G' の積に写される．この対応は単射でもある．なぜならば，$L_g = L_h$ ならば，$g = L_g(e) = L_h(e) = h$ となるからである．それゆえ，G と S_g の部分群 G' との間の同型写像を構成できた． □

(8.2) 定理． G が位数 n の有限群ならば，G は S_n の部分群に同型である．

証明． G の元が $1, 2, \ldots, n$ と何らかの方法で番号付けられているとすれば，G の各置換は $1, 2, \ldots, n$ の置換を誘導する．これは S_G から S_n への同型写像を与え，S_G の部分群 G' はそれゆえ S_n の部分群 G'' と同型になる．G は G' に同型であるので，2 つの同型写像の合成は同型写像であるから，G は G'' に同型である． □

例として，G を，前章の冒頭で導入されたチェス盤の平面的な対称性のなす群として，G'' を実際に書き下してみよう．乗法表から，

$$L_r(e) = r, \qquad L_r(r) = r^2 = e,$$

$$L_r(q_1) = rq_1 = q_2, \qquad L_r(q_2) = rq_2 = q_1$$

となる．それゆえ，L_r は e と r を交換し，q_1 と q_2 を交換する．同様にして，L_{q_1}, L_{q_2} を計算し，元 e, r, q_1, q_2 に対してそれぞれ番号 $1, 2, 3, 4$ を振ると，G は S_4 の部分群 $\{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ と同型であることが示される．

演習問題

8.1. 正 4 面体の辺に 1 から 6 の番号を振り，正 4 面体の各回転対称性が S_6 の元を生じるようにする．このようにして生ずる S_6 の中の 12 個の元を求め，それらが S_6 の部分群をなすことを確かめよ．

8.2. 正 4 面体の隣り合う面それぞれの重心どうしを結んで，その結果として正 4 面体の内部に作られる 2 つ目の正 4 面体は，最初の正 4 面体と「逆さ」になることを確認せよ．

8.3. 正 6 面体の面に 1 から 6 の番号を付ける．S_6 の元で，図 8.2 の回転 r, s, t に対応するものを見つけよ．

8.4. 図 18.1 に示されているように，正 6 面体の各面上に線分を描いたものを考える．正 6 面体のどの回転対称性が面上の線分を面上の線分に写すか？ S_4 の部分群のうちのどれが，これらの回転に対応するか？

8.5. 5 つの正 12 面体を描き，その各々の内部には異なる正 6 面体が描かれているものとする．自分の描いた図を用いて，これらの正 6 面体が次の回転によりど

のように置換されるかを調べよ.

(a) 正12面体の向かい合う一組の面の重心どうしを結んで得られる軸に関する $2\pi/5$ 回転.

(b) 正12面体の向かい合う一組の辺の中点どうしを結んで得られる軸に関する π 回転.

(c) 正12面体の向かい合う一組の頂点を結んで得られる軸に関する $2\pi/3$ 回転.

8.6. ケイリーの定理の手順を実行して, D_3 と同型となる S_6 の部分群を求めよ.

8.7. ケイリーの定理を $G = \mathbb{R}$ として適用したときに, これは, 実軸上のすべての平行移動を含むような $S_{\mathbb{R}}$ の部分群を与えることを示せ.

8.8. S_n の各元 α を S_{n+2} の元 α_* へ次のように変換する. 新しい置換 α_* は整数 $1, 2, \ldots, n$ については α と全く同様に振舞う. もし α が偶置換であれば, α_* は $n+1$ と $n+2$ を固定し, 一方, α が奇置換であれば, α_* は $n+1$ と $n+2$ を入れ替える. α_* は常に偶置換であること, および対応 $\alpha \to \alpha_*$ は S_n から A_{n+2} のある部分群への同型写像であることをそれぞれ確かめよ. $n = 3$ のときに, この部分群を求めよ.

8.9. G が位数 n の有限群であるとき, G は交代群 A_{n+2} の部分群と同型であることを証明せよ.

8.10. α が S_n の元であるとき, S_{2n} における置換 $\alpha_\#$ を次のように定義する.

$$\alpha_\#(k) = \begin{cases} \alpha(k), & 1 \le k \le n \\ \alpha(k-n)+n, & n+1 \le k \le 2n. \end{cases}$$

$\alpha_\#$ は常に偶置換であること, および対応 $\alpha \to \alpha_\#$ は S_n から A_{2n} のある部分群への同型写像であることをそれぞれ確かめよ. $n = 3$ のときに, この部分群を求めよ.

8.11. G を正4面体 T のすべての対称性のなす群とし, 図7.2の記号を使用する. 頂点の互換 (12) を誘導するような T の対称性 q を見つけよ. そして, qr が4-サイクル (1234) を誘導することを示せ. qr は回転でも反転でもないが, 3つの反転の合成であることを確かめよ. T の対称性を数え, G は S_4 と同型であることを証明せよ.

8.12. 正6面体のすべての対称性のなす群に関して, 主対角線の各置換はちょうど2つの対称性によって実現することができることを示せ.

第9章　行列群

実数を成分に持つ可逆な $n \times n$ 行列全体のなす集合は，行列の積により群をなす．$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ を上に述べたような 2 つの行列とするとき，積 AB の ij 成分は和

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

であったことを思い出そう．行列の積は結合的であり，$n \times n$ 単位行列 I_n は単位元の役割を果たす．上の積 AB は可逆であり，逆元は $B^{-1}A^{-1}$ である．

この群の中の各行列 A は，$\mathbb{R}^n$ のすべてのベクトル $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ に対して，$f_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A^t$ と $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を定めることにより，1 つの可逆な線型変換を定める．ここで，t は行列の転置を意味する．

$$f_{AB}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(AB)^t = \mathbf{x}B^tA^t = f_A(f_B(\mathbf{x}))$$

であるので，**行列の積** AB **は線型変換の合成** f_Af_B **を定める**ことがわかる．逆に，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が可逆な線型変換で，A を f の両方の $\mathbb{R}^n$ の標準基底に関する表現行列とすれば，A は可逆であり，$f = f_A$ である．これらの理由から，この群は**一般線型群** (General Linear Group) GL_n と呼ばれる．もし行列のすべての成分が実数であることを強調したい場合には，$GL_n(\mathbb{R})$ と書く．$\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$ へと変えれば，対応する群 $GL_n(\mathbb{C})$ は $n \times n$ の可逆な複素行列となる．

$n \geq 2$ のとき，行列の積は可換ではない．それゆえ，私たちは**無限個の非可換群**の族 $GL_2, GL_3, \ldots$ を得る．$n = 1$ のときは，各行列は 0 ではない実数である唯 1 つの成分からなり（0 でないのは，行列が可逆であるからである），行列の積は通常の数の積に帰着する．ゆえに，GL_1 は $\mathbb{R} - \{0\}$ と同型である．もし，$A \in GL_n$ ならば，$(n+1) \times (n+1)$ 行列

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は GL_{n+1} に属する．$\tilde{A}$ を構成するために，まず最初に A に 0 からなる余分な列を加えて，$n \times (n+1)$ 行列を作り，次にこれに最後の成分が 1 で他の成分が 0 であるような余分な行を上で作った行列に加える．このようにして構成される行列すべての集まりは，GL_{n+1} の**部分群**であり，対応 $A \to \tilde{A}$ は GL_n が GL_{n+1} のこの部分群に同型であることを示している．線型変換の言葉でいえば，$\mathbb{R}^{n+1}$ において，最後の座標を 0 としたベクトル全体からなるものとして $\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分空間と見なせば，$f_{\tilde{A}}$ は $\mathbb{R}^n$ の上では f_A として作用し，各点の最後の座標は変えない．つまり，$\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ であり，$f_{\tilde{A}} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ は，

$$f_{\tilde{A}}(\mathbf{x}, z) = (f_A(\mathbf{x}), z)$$

で与えられる．

$n \times n$ 行列 A が**直交行列** (orthogonal matrix) であるとは，$A^t A$ が単位行列であるときをいう．このとき，和

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}b_{nj}$$

は i と j が等しいとき 1 となり，その他の場合は 0 となる．それゆえ，A の行はすべて長さが 1 で，互いに直交している．専門的な用語でいえば，これらは $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底をなしている．もちろん，A の列もまた $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底をなしている．そして，$\det(A^t A) = (\det A)^2$ なので，A の行列式の値は，$+1$ または -1 である．A と B が直交行列ならば，

$$\begin{aligned}(AB^{-1})^t AB^{-1} &= (B^{-1})^t A^t AB^{-1} \\ &= (B^t)^t A^t AB^{-1} \\ &= BA^t AB^{-1} = I_n\end{aligned}$$

となる．それゆえ，AB^{-1} は直交行列であり，定理 (5.1) により，$n \times n$ の直交行列の全体は GL_n の部分群である．この部分群は**直交群** (Orthogonal Group) O_n と呼ばれる．O_n の元で行列式の値が 1 であるものの集まりは O_n の部分群をなし，**特殊直交群** (Special Orthogonal Group) SO_n と呼ばれる．

もし，$A \in O_n$ ならば，対応する線型変換 f_A は距離を保ち，また直交性を保つ． これが成り立つことを見るために，$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ を $\mathbb{R}^n$ の点とし，$f_A(\mathbf{x})$ と

$f_A(\mathbf{y})$ の内積を考える．

$$\begin{aligned} f_A(\mathbf{x}) \cdot f_A(\mathbf{y}) &= (\mathbf{x}A^t)(\mathbf{y}A^t)^t \\ &= \mathbf{x}A^tA\mathbf{y}^t \\ &= \mathbf{x}\mathbf{y}^t = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{aligned}$$

となる．$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ なので，$\mathbf{y}$ を $\mathbf{x}$ に等しいとおけば，$\|f_A(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ となることがわかり，それゆえ，f_A は長さを保つ．また，

$$\|f_A(\mathbf{x}) - f_A(\mathbf{y})\| = \|f_A(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

となるので，f_A は任意の 2 点間の距離を保つことがわかる．最後に，$f_A(\mathbf{x}) \cdot f_A(\mathbf{y})$ が 0 になるのは，$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ が 0 になるときに限るから，もし，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ が直交するベクトルならば，$f_A(\mathbf{x})$ と $f_A(\mathbf{y})$ も直交することを注意しておく．

逆方向の議論をすることもできる．$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が線型変換で，長さを保つとする．このとき，f は任意の 2 点間の距離を保つ．なぜならば，

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|f(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

となるからである．また，直角を保つ．なぜならば，

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) &= \frac{1}{2}\{\|f(\mathbf{x})\|^2 - \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|^2 + \|f(\mathbf{y})\|^2\} \\ &= \frac{1}{2}\{\|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\} \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{aligned}$$

となるからである．したがって，f は $\mathbb{R}^n$ に対する標準基底をある正規直交基底に写す．f の表現行列 A はこの基底の元をその列に持つので，結果として，A は直交行列である．$f = f_A$ かつ $A \in O_n$ と結論付けられる．

$n = 2$ や 3 とすると，私たちはすぐにより「くつろいだ」気分になる．$A \in O_2$ とすると，A の列は単位ベクトルで，互いに直交している．

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

とすると，(a, b) は単位円周上にあるから，$0 \leq \theta < 2\pi$ をみたすある θ に対して，$a = \cos\theta, b = \sin\theta$ と書くことができる．(c, d) は (a, b) と直角の位置にあるから，やはり単位円周上にあり，$c = \cos\varphi$, $d = \sin\varphi$ と書け，ここで，$\varphi = \theta + \pi/2$ あるいは $\varphi = \theta - \pi/2$ のいずれか一方となる．最初の場合は，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となり，これは SO_2 の元であり，(線型変換としては,）原点を中心とする反時計回りに角度 θ の**回転**を表す．もう 1 つの場合は，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

となり，これは行列式の値が -1 であり，(線型変換としては,）正の x-軸から角度 $\theta/2$ にある（原点を通る）直線に関する**反転**を表す．**それゆえ，2×2 の直交行列は原点を中心とする平面の回転を表すか，原点を通る直線に関する反転のいずれか一方を表す．そして，行列式の値が $+1$ となるのは，その行列が回転を表すときに限る．** 複素平面上の単位円周として姿を変えていたが，以前に SO_2 には出会っている．単位円周上の各点は $e^{i\theta}$ の形をしている．ここで，$0\leq\theta<2\pi$ である．そして，対応

$$e^{i\theta} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

は C から SO_2 への同型写像である．

次に，A が SO_3 に属するとしよう．特性多項式 $\det(A-\lambda I)$ は 3 次式であり，それゆえ，少なくとも 1 つの実根を持たなければならない．つまり，A は実数の固有値を持つ．固有値はすべて絶対値が 1 であり，その積が $\det(A)$ であるので，$+1$ が A の固有値であることがわかる．$\mathbf{v}$ を対応する固有ベクトルとすると，$\mathbf{v}$ によって定められる原点を通る直線は，f_A によって動かされない．また，f_A は直角を保つから，$\mathbf{v}$ に垂直な平面で原点を含むものは，それ自身に写されなければならない．$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底で，その最初の元が単位ベクトル $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ となるものを構成する．この新しい基底に関する f_A の行列は SO_3 の元となり，次の形をしているものとなるだろう．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \quad 0 \\ 0 & \\ 0 & \quad B \end{pmatrix}.$$

明らかに，$B\in SO_2$ であるから，f_A は $\mathbf{v}$ によって定められる軸に関する回転である．**それゆえ，SO_3 の各行列は，原点を通る軸に関する $\mathbb{R}^3$ の回転を表している．** 逆に，原点を固定するような $\mathbb{R}^3$ のどのような回転も，SO_3 のある行列によって表される（演習問題 9.11 を見よ）．

A は O_3 の元であるが，SO_3 の元ではないとき，$AU \in SO_3$ となる．ここで，

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である．U は (x, y) 平面に対する反転を表すことに注意せよ．A を積 $(AU)U$ と書けば，

$$f_A = f_{AU} f_U$$

となる．上のように，f_{AU} は回転である．結果として，f_A は (x, y) 平面に関する反転の後に，回転を合成したものとなる．

SO_3 のことを 3 次元における**回転群**としばしば呼ぶことにしよう．もし，正多面体が $\mathbb{R}^3$ の中にその重心が原点であるように置かれた場合，その対称性の各々は O_3 の中の 1 つの行列として表されることになる．その回転対称性の群は，それゆえ，SO_3 の部分群と同型である．そして，そのすべての対称性は O_3 の部分群と同型である．

例． 点 $P = (1, 1, 1)$, $Q = (-1, -1, 1)$, $R = (1, -1, -1)$, $S = (-1, 1, -1)$ は正 4 面体の頂点であり，その重心は原点にある（図 9.1 を見よ）．頂点 P を通る軸に関する 2 つの回転は，座標軸を巡回的に置換し，それらの表現行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

によって与えられる．辺 PQ と RS のそれぞれの中点を結ぶ対称軸は z 軸であり，この軸に関する π 回転の表現行列は

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．P, Q, O によって定まる平面に関する反転は，P と Q を動かさないが，R と S を入れ替える．対応する表現行列は，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

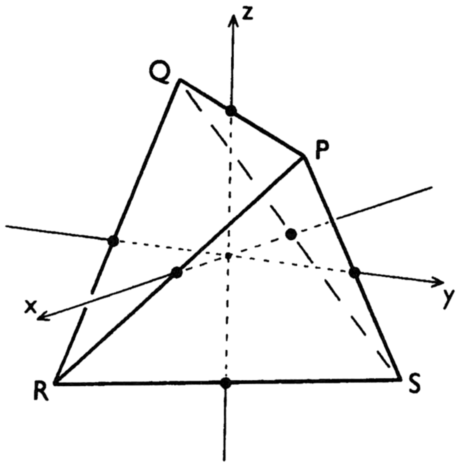


図 9.1

である．P, Q, R S を巡回的に置換する対称性は回転でも反転でもなく，3 つの反転の積となる．その表現行列は何だろうか？

19 章において，SO_3 の有限部分群の分類を行うことになる．そのようなどの部分群も巡回群か，2 面体群か，正多面体の回転対称性のなす群か，のいずれかに同型になる．

$GL_n(\mathbb{C})$ の行列は，標準的な n-次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の（可逆な）線型変換に対応している．$\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ であるとき，$\mathbf{z}$ の長さは，$\mathbf{zz}^*$ の平方根である．ここで，$*$ は複素共役を表す．複素行列 U は U^*U が単位行列のとき，**ユニタリ行列** (unitary matrix)[1]と呼ばれる．ユニタリ行列は $\mathbb{C}^n$ における長さを保つ線型変換にちょうど対応するものである．$n \times n$ のユニタリ行列全体の集まりは，$GL_n(\mathbb{C})$ の部分群をなし，**ユニタリ群** (Unitary Group) U_n と呼ばれる．U_n の元で行列式の値が $+1$ となるものは，**特殊ユニタリ群** (Special Unitary Group) SU_n をなす．

---

1 ［訳注］ここで U^* は行列 U のすべての成分を共役複素数にし，さらに転置したものである．

演習問題

行列による線型変換の表現を含むこれらの演習問題においては，対象となるユークリッド空間には，標準基底が備えられているものと仮定する．

9.1. 次の実数成分の $n \times n$ 行列の集まりのうち，行列の積で群をなすものはどれか？

(a) 対角成分が 0 ではない対角行列．

(b) 対称行列．

(c) 整数を成分に持つ可逆な行列．

(d) 有理数を成分に持つ可逆な行列．

9.2. 次の形のすべての行列は $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群であることを確かめよ．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},\ \text{ここで，} a, b, c \in \mathbb{R} \text{ かつ } ac \neq 0.$$

9.3. 整数を成分に持つ $GL_n(\mathbb{R})$ の元で，行列式の値が $+1$ または -1 のものは，$GL_n(\mathbb{R})$ の部分群をなすことを証明せよ．この群は $GL_n(\mathbb{Z})$ と書き表される．

9.4. 点 $(1, -\sqrt{3})$, $(1, \sqrt{3})$, $(-2, 0)$ は正 3 角形を定める．この 3 角形の平面的な対称性を表す O_2 の中の行列を求めよ．頂点の座標が $(2, 0)$, $(1, \sqrt{3})$, $(-1, \sqrt{3})$, $(-2, 0)$, $(-1, -\sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$ である正 6 角形に対しても同様の計算を行え．

9.5.

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad B_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

とする．$A_\theta A_\varphi = A_{\theta+\varphi}$, $A_\theta B_\varphi = B_{\theta+\varphi}$, $B_\theta A_\varphi = B_{\theta-\varphi}$, $B_\theta B_\varphi = A_{\theta-\varphi}$ を証明せよ．ここで，行列の中に現れる角度については，mod 2π として理解する．これらの結果を幾何的に解釈せよ．

9.6. 前問の記号を用いて，積 $A_\theta B_\varphi A_\theta^{-1}$, $B_\varphi A_\theta B_\varphi$, $A_\theta B_\varphi A_\theta^{-1} B_\varphi$ を計算せよ．これらの各々を $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ のときに求めよ．

9.7. 次の行列が SO_3 の元を与えるように成分を定めよ．また，$O_3 - SO_3$ の元を与えるように成分を定めよ．

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot \\ -1/\sqrt{2} & 0 & \cdot \end{pmatrix}.$$

これらの行列で表される線型変換を記述せよ．

9.8. 次の 2 つの行列はどちらも回転を表すことを示し，これらの回転に関する軸を見つけよ．

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

9.9. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ を $\mathbb{R}^3$ における3つの互いに直交するベクトルとし，A を $\mathbf{v}_1$ を第1列に，$\mathbf{v}_2$ を第2列に，$\mathbf{v}_3$ を第3列に持つ行列とする．

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

であるならば，ABA^{-1} は $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ を含む平面に関する反転を表し，$-ABA^{-1}$ は $\mathbf{v}_3$ によって定まる軸に関する π 回転を表すことをそれぞれ示せ．平面 $x + \sqrt{3}y = z$ に関する反転を表す行列を見つけよ．

9.10. 次の対応は，O_2 から SO_3 の部分群への同型写像であることを証明せよ．

$$A \longrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & A \in SO_2 \quad \text{のとき}, \\ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & A \in O_2 - SO_2 \quad \text{のとき}. \end{cases}$$

演習問題9.4の図形に厚みを付けて，平面的な正3角形と正6角形の板をそれぞれ作り，これらの板の回転対称性を表す SO_3 の元を書き下せ．

9.11. 原点を固定する $\mathbb{R}^3$ の回転は，SO_3 の行列によって表されることを示せ．まず最初に回転の軸が z-軸であると仮定し，次に一般の場合を取り扱ってみよ．

9.12. 次の4つの行列は SO_3 の部分群をなすことを証明し，対応する回転を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + (y-3)^2 \leq 25, x^2 + (y+3)^2 \leq 25, -1 \leq z \leq 1\}$$

の図を描き，この図形は，平坦な「正2角形」の板であり，その回転対称性はちょうど上に表されたものを持つことを確かめよ．この立体の回転対称性の群をしばしば **2面体群** D_2 と呼ぶことにする．

9.13. $n \times n$ のユニタリ行列は行列の積で実際に群をなすことを確かめよ．また，これらの行列の各々の行列式の値は絶対値が1の複素数であることを確かめよ．

9.14. U_2 の元は，

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -e^{i\theta} w^* & e^{i\theta} z^* \end{pmatrix}$$

の形を持つことを示せ．ここで，$z, w \in \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $zz^* + ww^* = 1$ である．これらの行列のうち，どれが SU_2 に属するか？

第10章　群の直積

2つの群 G, H の**直積** (direct product) $G\times H$ は，次のようにして構成される．この元は，順序付きの組 (g,h) である．ここで，$g\in G$, $h\in H$ である．積は，

$$(g,h)(g',h')=(gg',hh')$$

で定められる．g と g' はともに G の元であり，これらは G の中で掛け合わされて，最初の項の gg' を与える．2番目の項は, h と h' を H の中で掛け合わせることで得られる．それゆえ，(gg',hh') は $G\times H$ の元となる．結合法則は G と H の両方の結合法則から直接従う．組 (e,e) は単位元であり，(g^{-1},h^{-1}) が (g,h) の逆元となる．よって，$G\times H$ は群である．(G と H の単位元に同じ記号 e を用いているが，このことが読者を混乱させないよう願う.)

対応 $(g,h)\to(h,g)$ は明らかに $G\times H$ から $H\times G$ への同型写像を与える．G または H のいずれか一方が無限群であるならば，$G\times H$ は無限群であり，そうでなければ，$G\times H$ の位数は G と H の位数の積である．G と H がともにアーベル群であれば，$G\times H$ はアーベル群である．ここで，対応 $g\to(g,e)$ を経由することにより，G は $G\times H$ の部分群 $\{(g,e)|g\in G\}$ と同型であり，$h\to(e,h)$ を経由することにより，H は部分群 $\{(e,h)|h\in H\}$ と同型である．アーベル群の任意の部分群はアーベル群であるから，もし $G\times H$ がアーベル群であれば，このとき G と H の両方ともアーベル群であることがわかる．有限個の群の集まりの直積 $G_1\times\cdots\times G_n$ は，元 $(x_1,\ldots,x_n)$ を持つ．ここで，$x_i\in G_i$, $1\le i\le n$ である．これらの元は

$$(x_1,\ldots,x_n)(x_1',\ldots,x_n')=(x_1x_1',\ldots,x_nx_n')$$

として掛け合わされる．再び，直積因子の順序を変えることはどの場合でも同型な群を与える．

例.

(i) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ は6個の元 $(0,0),(1,0),(0,1),(1,1),(0,2),(1,2)$ を持つ．これらは

$$(x,y)+(x',y')=(x+_2 x', y+_3 y')$$

と掛け合わされる．群の構造に対して $+$ を使うのは少し気が引けるように思える．なぜならば，各成分の中で「足し算」をしているからである．巡回群の積を使うときはいつでも，この記法に従っていこう．元 $(1,1)$ を繰り返し自分自身に足すことにより，すべての群の元を尽くすことができる．それゆえ，$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ は**巡回群**であり，$\mathbb{Z}_6$ に同型でなければならない．$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ から $\mathbb{Z}_6$ への具体的な同型写像は次で与えられる．

$$(0,0)\mapsto 0,\quad (1,1)\mapsto 1,\quad (0,2)\mapsto 2,$$
$$(1,0)\mapsto 3,\quad (0,1)\mapsto 4,\quad (1,2)\mapsto 5.$$

(ii) 同様の方法で，$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の4個の元を $(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$ と書き下すことができる．今回は2を法とした和を両方の成分で取ることになる．単位元でない各元は今，位数2を持つので，群は巡回群ではない．この群はチェス盤の平面的な対称性のなす群（7章）に同型であり，対応は次で与えられる．

$$(0,0)\mapsto e,\quad (1,0)\mapsto q_1,$$
$$(0,1)\mapsto q_2,\quad (1,1)\mapsto r.$$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ はしばしば**クラインの群** (Klein's group) と呼ばれる．

(iii) $\mathbb{R}$ の n 個のコピーの直積を $\mathbb{R}^n$ と書く．通常の方法のように，$\mathbb{R}^n$ の元をベクトル $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ と考え，群の演算は単なるベクトルの足し算であり，

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$$

と書かれる．

(10.1) 定理. $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ が巡回群であるための必要十分条件は，m と n の最大公約数が1となることである．

証明. k を $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ の元 $(1,1)$ の位数とする．$(1,1)$ を k 回自分自身に足し合わせると $(0,0)$ になる．別の言葉でいえば，

$$(k \pmod m),\ k \pmod n)) = (0,0)$$

となる．これは，m と n はともに k の約数であることを意味する．もし，m と n の最大公約数が 1 ならば，このとき，mn は k の約数でなければならない．よって，$k = mn$ である．したがって，この場合は $(1,1)$ は $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ を生成し，巡回群を得る．

ここで，d を m と n の最大公約数とし，d は 1 よりも大きいと仮定する．$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ は巡回群ではないことを示さなければならない．$m' = m/d$, $n' = n/d$ とする．$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ の任意の元 (x,y) に対して，

$$\begin{aligned} m'dn'(x,y) &= (m'dn'x \pmod{m},\ m'dn'y \pmod{n}) \\ &= (mn'x \pmod{m},\ m'ny \pmod{n}) \\ &= (0,0) \end{aligned}$$

となる．よって，(x,y) の位数は高々$m'dn'$ となる．したがって，$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ は位数 mn の元を含まないので，結果として，巡回群ではあり得ない． □

例． (iv) I を 3×3 の単位行列とし，$-I$ を J と書くことにする．I と J はともに O_3 のすべての行列と交換するから，これら 2 つは O_3 の位数 2 の部分群をなす．O_3 は SO_3 とこの部分群の直積に同型であることを示そう．写像

$$\varphi : SO_3 \times \{I, J\} \longrightarrow O_3$$

を $\varphi(A,U) = AU$ と定義する．ここで，$A \in SO_3$ で，$U \in \{I,J\}$ である．すると，φ は現在考えている代数的構造を保つ．なぜならば，すべての $A, B \in SO_3$ と $U, V \in \{I,J\}$ に対して，

$$\begin{aligned} \varphi((A,U)(B,V)) &= \varphi(AB, UV) \\ &= ABUV \\ &= AUBV \\ &= \varphi(A,U)\varphi(B,V) \end{aligned}$$

となるからである．もし，$\varphi(A,U) = \varphi(B,V)$ ならば，$AU = BV$ であり，これは $\det(AU) = \det(BV)$ を与える．しかし，$A \in SO_3$ であるから，

$$\det(AU) = \det(A) \cdot \det(U) = \det(U)$$

となる．同様に，$\det(BV) = \det(V)$ となる．それゆえ，$U = V$, $A = B$ となり，φ は単射であると結論できる．残ったのは，φ が全射であることを確かめることだけである．$A \in O_3$ が与えられると，$A \in SO_3$ で $A = \varphi(A, I)$ と

なるか，$AJ \in SO_3$ で，$A = \varphi(AJ, J)$ となるかのいずれか一方である．これで議論は完了である．

$\{I, J\}$ は $\mathbb{Z}_2$ と同型であることに注意しよう．対応は，ただ単に，I を 0 へ，J を 1 へ送れば得られる．**それゆえ，O_3 は，$SO_3 \times \mathbb{Z}_2$ に同型である．** 同じ議論により，n が**奇数のときは**，O_n は $SO_n \times \mathbb{Z}_2$ と同型になる．n が偶数のときは，この結果は成り立たない（演習問題 10.9 を見よ）．

上の例は次のように一般化される：H と K がある群 G の部分集合で，HK を $x \in H, y \in K$ であるすべての積 xy の集まりとする．

(10.2) 定理． H と K が G の部分群で，$HK = G$ となるものとする．もし，これらが単位元のみを共通に持ち，H のすべての元は K のすべての元と交換するならば，G は $H \times K$ と同型である．

証明． 例 (iv) の議論を真似よう．写像

$$\varphi : H \times K \longrightarrow G$$

をすべての $x \in H, y \in K$ に対して，$\varphi(x, y) = xy$ と定義する．すると，

$$\begin{aligned} \varphi((x,y)(x',y')) &= \varphi(xx', yy') \\ &= xx'yy' \\ &= xyx'y' \quad (H\text{の元は }K\text{ の元と可換だから}) \\ &= \varphi(x,y)\varphi(x',y') \end{aligned}$$

となる．よって，φ は $H \times K$ の積を G の積へと写す．もし，$\varphi(x, y) = \varphi(x', y')$ ならば，$xy = x'y'$ であり，それゆえ，

$$(x')^{-1}x = y'y^{-1}$$

となる．左辺は H に属し，右辺は K に属するので，両方とも $H \cap K$ に属する．したがって，仮定より，これは単位元でなければならない．よって，$x = x', y = y'$ となり，φ は単射である．$HK = G$ であることもわかっているので，このことは，G のすべての元は，ある $x \in H, y \in K$ に対して，積 xy として表されることを意味する．それゆえ，φ は全射であり，$H \times K$ から G への同型写像を与える．　□

線型変換 $f_J : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は各ベクトル $\mathbf{x}$ を $-\mathbf{x}$ へ写す．この変換は**中心反転** (central inversion) と呼ばれる．$\mathbb{R}^3$ の中に正多面体をその重心が原点と

重なるように置く．このとき，正 4 面体を除いて，正多面体はその対称性の 1 つとして中心反転を持つ．G が正多面体のすべての対称性のなす群で，H がその回転対称性のなす部分群（それゆえ，H の元は SO_3 の行列に対応する）とすれば，定理 (10.2) の応用として，G は $H \times \langle f_J \rangle$ と同型であり，ゆえに，$H \times \mathbb{Z}_2$ と同型である．**それゆえ，正 6 面体，正 8 面体のすべての対称性のなす群は $S_4 \times \mathbb{Z}_2$ に同型であり，正 12 面体，正 20 面体のすべての対称性のなす群は $A_5 \times \mathbb{Z}_2$ に同型である．**

演習問題

10.1. $G \times H$ が巡回群であれば，G と H はともに巡回群であることを証明せよ．

10.2. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ と同型ではないことを示せ．

10.3. $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ と同型であり，$\mathbb{C} - \{0\}$ は，$\mathbb{R}^{\text{pos}} \times C$ と同型であることを証明せよ．

10.4. クラインの群はしばしば **4 元群** (four group, Vierergruppe[1]) と呼ばれ，V で表される．$\mathbb{Z}_3 \times V$ は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ と同型であることを示せ．

10.5. 「対角線集合」$\{(x, x) | x \in G\}$ は $G \times G$ の部分群であること，およびこの部分群は G に同型であることを示せ．

10.6. A が G の部分群であり，B が H の部分群であるとき，$A \times B$ は $G \times H$ の部分群であることを確かめよ．$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ の部分群で，このような方法で得られないものを見つけよ．

10.7. 次の群のうち，どれとどれが同型となるか？

$$\mathbb{Z}_{24}, \quad D_4 \times \mathbb{Z}_3, \quad D_{12}, \quad A_4 \times \mathbb{Z}_2,$$
$$\mathbb{Z}_2 \times D_6, \quad S_4, \quad \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2.$$

10.8. $A_n \times \mathbb{Z}_2$ の元 $(\varepsilon, 1)$ は $A_n \times \mathbb{Z}_2$ のすべての元と交換する．この考察を用いて，$n \geq 3$ のとき，$A_n \times \mathbb{Z}_2$ は S_n と同型ではないことを証明せよ．

10.9. n が偶数のとき，例 (iv) の構成法では，なぜ $SO_n \times \mathbb{Z}_2$ から O_n への同型写像を導くことができないのだろうか？ O_n のどの元が O_n のすべての元と交換するのだろうか？ n が偶数のとき，$SO_n \times \mathbb{Z}_2$ は O_n と同型ではないことを示せ．

10.10. G をその元が整数の無限列 $(a_1, a_2, \ldots)$ からなり，掛け合わせは，各項ごとに和を取ったものとする．

$$(a_1, a_2, \ldots)(b_1, b_2, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots).$$

---

[1] ［訳注］ドイツ語．英語で four group の意味．

$G \times \mathbb{Z}$ と $G \times G$ はともに G に同型であることを証明せよ．

10.11. n が奇数のとき，D_{2n} は $D_n \times \mathbb{Z}_2$ に同型であることを示せ．

10.12. G が位数 4 の群で，巡回群でないならば，G はクラインの群と同型であることを証明せよ．

10.13. G は有限群で，単位元以外のすべての元の位数が 2 であるものとする．G は $\mathbb{Z}_2$ の有限個のコピーの直積と同型であることを証明せよ．

第11章　ラグランジュの定理

有限群 G とその部分群 H を考えよう．H と G の位数の間には何か関係はあるのだろうか？ H が G のすべてでないと仮定して，$G-H$ から元 g_1 を選び，H のすべての元の左側から g_1 を掛けて，集合

$$g_1H = \{g_1h | h \in H\}$$

を作る．g_1H は H と同じ大きさであり，H と共通部分を持たないことを主張しよう．H から g_1H への対応 $h \mapsto g_1h$ は逆にたどることができ（ただ単に，g_1H の各元に g_1^{-1} を左から掛ければよい），それゆえ，この対応は全単射であるから，最初の主張が従う．2 番目の主張については，元 x が H と g_1H の両方ともに属すると仮定する．このとき，$x = g_1h_1$ となるような元 $h_1 \in H$ が存在する．しかし，これは $g_1 = xh_1^{-1}$ を与える．これは g_1 を H の外部から最初に選んだことと矛盾する．

H と g_1H で G のすべてを尽くすとするならば，このとき，明らかに，$|G| = 2|H|$ である．そうでなければ，元 $g_2 \in G-(H \cup g_1H)$ を選び，g_2H を作る．再び，これは H と同じ大きさであり，H と共通部分を持たない．これが g_1H と共通部分を持たないと願いたい．このことを確かめるために，元 x が g_1H と g_2H の両方ともに属すると仮定する．このとき，$x = g_1h_1 = g_2h_2$ となるような元 $h_1, h_2 \in H$ が存在して，$g_2 = g_1(h_1h_2^{-1})$ となる．これは g_2 を g_1H の外部から選んだことと矛盾する．H, g_1H, g_2H で G のすべてを尽くすとするならば，このとき，明らかに，$|G| = 3|H|$ である．そうでなければ，元 g_3 をこれらの補集合から選び，続けて，g_3H が H, g_1H, g_2H のいずれとも共通部分を持たないことを確かめる．G は有限群なので，この操作は有限回の手順の後に終了する．もし，それが k 回であれば，G は $k+1$ 個の

$$H, g_1H, \ldots, g_kH$$

の和集合に分解され，このうちのどの 2 つも共通部分は持たず，また，これらの各々は H と同じ大きさを持つことがわかる．結果として，$|G| = (k+1)|H|$ である．私たちは次の結果を証明したことになる．

(11.1) ラグランジュの定理． 有限群の部分群の位数は常にもとの群の位数の約数である．

この時点で一言注意を述べるのは適切であろう．G が有限群で，m が G の位数の約数であるとしても，G が位数 m の部分群を含む保証はないのである．実際，後で見るように，A_4 は位数 6 の部分群を持たない．このことは残念なことであるが，いくつかの救いはある．13 章において，p が G の位数の素数である約数ならば，このとき，G が位数 p の部分群を含むことを証明する．そして，部分群に関する 2 番目の存在定理がシロー (Sylow) の定理を扱う章において見つけられる．

上に述べた操作を具体的な例に対して実行するのは，理解の助けになるであろう．G は S_3 であるとして，部分群は $H = \{\varepsilon, (13)\}$ とする．g_1 を H の外部から選ぶ．例えば，$g_1 = (123)$ とすると，

$$g_1H = \{(123)\varepsilon, (123)(13)\} = \{(123), (23)\}$$

となる．g_2 を $H \cup g_1H$ の外部から選ぶ．例えば，$g_2 = (12)$ とすると，

$$g_2H = \{(12)\varepsilon, (12)(13)\} = \{(12), (132)\}$$

となる．群は今や 3 つの互いに素な部分集合 H, g_1H, g_2H に分解され，これらの各々は 2 つの元を含む．

ここにラグランジュの定理のいくつかの役に立つ系がある．ここでは，G は有限群を表すものとする．

(11.2) 系． G のすべての元の位数は，G の位数の約数である．

証明． 元の位数はその元によって生成される部分群の位数に等しいことを思い出そう．　□

(11.3) 系． G の位数が素数ならば，G は巡回群である．

証明． $x \in G - \{e\}$ ならば，x の位数は (11.2) により，G の位数に等しくなければならない．それゆえ，$\langle x \rangle = G$．　□

(11.4) 系． x が G の元であるならば，このとき，$x^{|G|} = e$ である．

証明. m を x の位数とする．(11.2) より，ある整数 k に対して，$|G| = km$ であることはわかっている．それゆえ，

$$x^{|G|} = x^{km} = (x^m)^k = e$$

となる． □

n を正の整数とし，整数 m で，$1 \leq m \leq n-1$ を満たし，m と n の最大公約数が 1 となるものの集まり R_n を考える．n を法とした積により，R_n は群になることを主張する．(これは 3 章の最後に挙げた問題の解答である．) m_1 と m_2 が R_n に属するとすれば，m_1m_2 と n の最大公約数は確かに 1 である．それゆえ，$m_1m_2 \pmod n$ と n は最大公約数 1 を持ち，これは R_n が n を法とした積で閉じていることを確かめたことになる．結合法則は容易に確かめられ（演習問題 3.5），また整数 1 は単位元として振舞う．最後に，$m \in R_n$ ならば，$xm + ny = 1$ を満たす整数 x と y が存在する．この式を mod n として読むと，積に関する m の逆元，つまり，$x \pmod n$ が与えられることがわかる．明らかに R_n はアーベル群である．その位数は $\varphi(n)$ と書かれる．φ はオイラー (Euler) のファイ関数と呼ばれる．

例.

(i) R_9 の元は，1, 2, 4, 5, 7, 8 であり，$\varphi(9) = 6$ である．$2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16 \pmod 9 = 7$, $2^5 = 32 \pmod 9 = 5$ なので，R_9 は整数 2 によって生成される巡回群である．

(ii) R_{16} の元は，1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 であり，$\varphi(16) = 8$ である．$H = \langle 3 \rangle$, $K = \langle 15 \rangle$ とする．$H = \{1, 3, 9, 11\}$, $K = \{1, 15\}$, $HK = R_{16}$, $H \cap K = \{1\}$ となることは容易に確かめられる．(10.2) により，

$$R_{16} \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$$

であることがわかる．

(11.5) オイラーの定理. x と n の最大公約数が 1 ならば，$x^{\varphi(n)}$ は n を法として 1 に合同である．

証明. x を n で割って得られる余り m は R_n に属する．(11.4) により，$m^{\varphi(n)}$ は n を法として 1 に合同であることがわかる．$x^{\varphi(n)}$ は n を法として $m^{\varphi(n)}$ に合同であるので，結果が従う． □

(11.6) フェルマーの小定理[1]．p が素数で，x が p の倍数でなければ，x^{p-1} は p を法として 1 に合同である．

証明． $\varphi(p) = p - 1$ に注目して，オイラーの定理を適用せよ．　□

ラグランジュの定理により，A_4 の部分群の位数は 12 の約数でなければならない．1 と 12 という極端な場合には，単位元だけからなる部分群と群全体がそれぞれ対応する．位数 2 の部分群は，単位元の他に位数 2 の元を含むであろう．そうすると，3 つの可能性 $\{\varepsilon, (12)(34)\}$, $\{\varepsilon, (13)(24)\}$, $\{\varepsilon, (14)(23)\}$ がある．位数 3 の部分群は 4 つあり，各々は 3-サイクルで生成される，つまり，

$$\{\varepsilon, (123), (132)\}, \qquad \{\varepsilon, (124), (142)\},$$
$$\{\varepsilon, (134), (143)\}, \qquad \{\varepsilon, (234), (243)\}$$

である．位数 4 の部分群は唯 1 つだけあり，

$$\{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

である．これは一意的である．なぜならば，A_4 の他のすべての元は，3-サイクルであり，3-サイクルは (11.2) により，位数 4 の群に属することはできないからである．

前にも述べたように，A_4 は位数 6 の部分群を含まない．というのも，H が A_4 の部分群であると仮定し，それが 6 個の元を持つとする．もし 3-サイクルが H に属するならば，その逆元もまた H に属さなければならない．それゆえ，H における 3-サイクルの数は**偶数**である．単位元のための余地が必要なので，6 にはなり得ない．4 個の元であったとする．例えば，α, α^{-1}, β, β^{-1} とする．このとき，ε, α, α^{-1}, β, β^{-1}, $\alpha\beta$, $\alpha\beta^{-1}$ はすべて異なり，H に属する．これは $|H| = 6$ という仮定に矛盾する．最後に，2 つの 3-サイクルだけが H に属するならば，このとき，H は部分群 $\{\varepsilon$, $(12)(34)$, $(13)(24)$, $(14)(23)\}$ を含まなければならない．しかし，4 は 6 の約数ではない．それゆえ，ラグランジュの定理はこの場合もまた除外することになる．結果として，位数 6 の部分群は存在しない．

---

[1] ［訳注］Fermat's little theorem.

演習問題

11.1. ラグランジュの定理の証明に使われた手順を，$G = D_6$, $H = \langle r \rangle$ の場合，$G = D_6$, $H = \langle r^3 \rangle$ の場合，$G = A_4$, $H = \langle (234) \rangle$ の場合と順に実行せよ．

11.2. H を G の部分群とする．$g_1H = g_2H$ となるのは，$g_1^{-1}g_2$ が H に属するときに限ることを証明せよ．

11.3. H と K を群 G の有限部分群とし，これらの位数が互いに素であるならば，これらの共通部分は単位元のみであることを示せ．

11.4. G の位数が相異なる 2 つの素数の積であるとする．G の任意の真部分群は，巡回群でなければならないことを示せ．

11.5. 群 G の部分集合 X, Y が与えられたとき，$x \in X, y \in Y$ の積 xy のすべての集まりを XY と書く．X と Y がともに有限集合であり，Y が G の部分群で，XY が X に含まれるならば，X の大きさは Y の大きさの倍数であることを証明せよ．

11.6. m と n の最大公約数が 1 であるならば，R_{mn} は直積群 $R_m \times R_n$ に同型であることを示せ．この考察を用いて，R_{20} が $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ と同型であることを確かめよ．

11.7. n を正の整数とし，m を $2n$ の約数とする．D_n は位数 m の部分群を含むことを示せ．

11.8. A_5 は，60 の各約数 m に対して，位数 m の部分群を含むか？

11.9. G を有限アーベル群とし，m をその群の元の位数の最小公倍数とする．G は位数 m の元を含むことを証明せよ．

11.10. 前問の結果が成り立たないような有限な非可換群の例を挙げよ．

11.11. H は有限群 G の部分群とし，$|G| = m|H|$ とするとき，ラグランジュの定理の証明を採用して，すべての $g \in G$ に対して，$g^{m!} \in H$ となることを示せ．

11.12. p が素数のとき，R_p は巡回群であることを証明せよ．

第12章　分割

集合 X の**分割** (partition) とは，集合の空でない部分集合への分解であり，それらのどの 2 つの部分集合も共通部分を持たず，これらの部分集合の和集合が X 全体となるものである．ラグランジュの定理の証明には群の部分集合への分割が含まれており，各部分集合は与えられた部分群と同じ元の個数を持つものであった．この章では，分割をどう**認識する**かを示そう．

X の分割があるとして，x, y を X の点とする．y の属する分割された部分集合に x が属するとき，x は y **と関係している**という．次の性質はすぐにわかる：

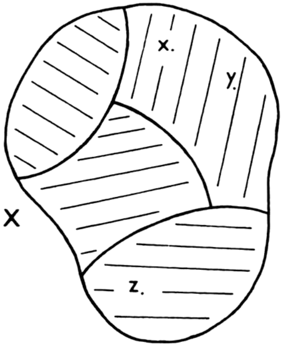
(a) 各 $x \in X$ は自分自身と関係している．

(b) 任意の 2 点 $x, y \in X$ に対して，x は y と関係しているならば，y は x と関係している．

(c) 任意の 3 点 $x, y, z \in X$ に対して，x は y と関係していて，y は z と関係しているならば，x は z と関係している．

これはやや抽象的なように見えるかもしれないが，図 12.1 は役に立つはずである．斜線を引いた領域は分割の異なる部分集合を表している．

ここで，私たちの見方を変えよう．X は集合とし，$\mathcal{R}$ は直積 $X \times X$ の部分集合とする．すなわち，$\mathcal{R}$ は x, y が X から来るような順序付けられた組 (x, y) の集まりである．**X の 2 点 x と y が与えられたとき，順序付けられた組 (x, y) が $\mathcal{R}$ に属することになるとき，x は y と関係しているという．**もし性質 (a), (b), (c) が満たされるならば，このとき，$\mathcal{R}$ を X 上の**同値関係** (equivalence relation) と呼ぶ．各 $x \in X$ に対して，x と関係しているすべての点の集まりは $\mathcal{R}(x)$ と書かれ，x の**同値類** (equivalence class) と呼ばれる．



x は y と関係している

x は z と関係していない

図 12.1

(12.1) 定理. $(x, y) \in \mathcal{R}$ であるときはいつでも，$\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(y)$ である．

証明. $(x, y) \in \mathcal{R}$ と仮定し，$z \in \mathcal{R}(x)$ とする．このとき，z は x に関係している．しかし，x は y に関係しているので，上に掲げた性質 (c) により，z は y と関係している．それゆえ，$z \in \mathcal{R}(y)$ となり，$\mathcal{R}(x) \subseteq \mathcal{R}(y)$ となる．性質 (b) により，$(y, x) \in \mathcal{R}$ であることもわかるから，それゆえ，x と y の役割を逆にすれば，$\mathcal{R}(y) \subseteq \mathcal{R}(x)$ となる．これで議論は完了である． □

例 (i). $X = \mathbb{Z}$ とし，$\mathcal{R}$ を $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ の順序付けられた組 (x, y) で，$x - y$ が 3 割り切れるもの全体からなるとする．確かに，どんな整数 x に対しても，$x - x$ は 3 で割り切れる．$x - y$ が 3 で割り切れるならば，$y - x$ もそうであるし，$x - y$ と $y - z$ の両方ともが 3 で割り切れるならば，これらの和である $x - z$ もそうである．よって，$\mathcal{R}$ は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係である．どんな整数 x も 0, 1, 2 のいずれか 1 つと関係している．結果として，3 つの異なる同値類がある．0 の同値類は 3 の倍数すべてからなり，1 の同値類は 3 を法として 1 に合同な整数のすべてを含み，2 の同値類は残りの整数であり，3 を法として 2 に合同な整数である．$\mathcal{R}(0)$, $\mathcal{R}(1)$, $\mathcal{R}(2)$ は $\mathbb{Z}$ の**分割**をなすことに注意せよ（図 12.2 を見よ）．これが私たちの次の結果の主張の手がかりを与える．

(12.2) 定理. X 上の同値関係の異なる同値類は X の分割を与える．

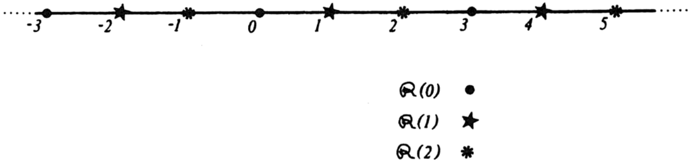


図 **12.2**

証明． 各同値類は空ではない．なぜならば，性質 (a) により，$\mathcal{R}(x)$ は常に x を含むからである．もし，$\mathcal{R}(x)$ と $\mathcal{R}(y)$ が共通部分を持つとすると，その共通部分の中にある点 z がなければならない．すると，z は x と y の両方ともに関係している．性質 (b) により，x は z と関係しているから，それゆえ，性質 (c) により，y ともまた関係している．$\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(y)$ と結論できる．よって，2 つの同値類が共通部分を持つのはそれらが一致するときに限る．最後に，各点 x はそれ自身の同値類 $\mathcal{R}(x)$ に属するので，同値類の和集合は X 全体である． □

例 (ii)． 上の例で，3 を正の整数 n に置き換えれば，$\mathbb{Z}$ 上の同値関係を得て，それにより，$\mathbb{Z}$ は n 個の同値類 $\mathcal{R}(0), \mathcal{R}(1), \cdots, \mathcal{R}(n-1)$ に分割される．これらは**剰余類** (congruence class) と呼ばれる．整数 x が $\mathcal{R}(m)$ に属するのは，x が n を法として m に合同であるときに限る．

例 (iii)． H を G の部分群とし，$\mathcal{R}$ を成分が G からなる順序付けられた組 (x, y) の集まりで，$y^{-1}x \in H$ となるものとする．$\mathcal{R}$ が G 上の同値関係であることを確かめるのは簡単である．(どのような $x \in G$ に対しても，$x^{-1}x = e \in H$ であり，$y^{-1}x \in H$ であれば，$x^{-1}y = (y^{-1}x)^{-1} \in H$ であり，$y^{-1}x, z^{-1}y \in H$ であれば，$z^{-1}x = (z^{-1}y)(y^{-1}x) \in H$ となる．) 特定の元 $g \in G$ の同値類は $g^{-1}x \in H$ を満たすすべての $x \in G$ からなる．すると，$g^{-1}x$ が H に属するのは，ある元 $h \in H$ に対して $x = gh$ となるときに限る．それゆえ，$\mathcal{R}(g)$ は H のすべての元に左から g を掛けて得られる集合 gH である．この集合 gH は，g によって定められる H の**左剰余類** (left coset) と呼ばれる．(12.2) によって，G における H の異なる左剰余類は G の分割をなす．まさに，ラグランジュの定理の証明で必要とされたことである．$\mathcal{R}$ が順序付けられた組 $(x, y) \in G \times G$ の集まりで，$xy^{-1} \in H$ となるものと変えた場合にも，G 上の同値関係を得る．この場合は，g の同値類は**右剰余類** (right coset)Hg と

呼ばれ，これは，H のすべての元に右から g を掛けて得られる集合である．

これまでのところ，特に新しいものは何も現れていない．ラグランジュの定理の，(12.2) を用いない完璧に満足のいく，ただ単に常識だけを用いた証明を成し遂げた．(12.2) の強みは，その**一般性**である．これは，集合のある分解が分割であることを素早く，簡単に確かめることを可能にしてくれる．以下に 2 つの応用を目の当たりにすることだろう．両方ともに後の章で重要となるものである．

例 (iv)．x, y を群 G の元とする．ある $g \in G$ に対して，$gxg^{-1} = y$ となるとき，x は y に**共役** (conjugate)[1]であるという．与えられた元に共役なすべての元の集まりは**共役類** (conjugacy class) と呼ばれる．異なる共役類は G の分割を与えることを主張する．$\mathcal{R}$ を $G \times G$ の部分集合で，x が y に共役であるような組 (x, y) からなるものとする．各 $x \in G$ は，$exe^{-1} = x$ であるから，自分自身と共役である．x が y に共役であるならば，例えば，$gxg^{-1} = y$ とすると，$g^{-1}yg = x$ であるから，y は x に共役である．最後に，x は y に共役で，y は z に共役ならば，例えば，$g_1xg_1^{-1} = y, g_2yg_2^{-1} = z$ とすれば，

$$\begin{aligned}(g_2g_1)x(g_2g_1)^{-1} &= g_2(g_1xg_1^{-1})g_2^{-1} \\ &= g_2yg_2^{-1} \\ &= z\end{aligned}$$

となるので，x は z に共役である．それゆえ，$\mathcal{R}$ は G 上の同値関係であり，その同値類，ここでは上に述べた共役類であるが，は G を分割する．これらの共役類については，14 章で様々な群に対して，実際に求められることになる．

例 (v)．X を集合とし，G を S_X の部分群で，G の各元が X の各点を置換するものとする．$\mathcal{R}$ を $X \times X$ の部分集合で，以下に定義されるものとする．順序付けられた組 (x, y) が $\mathcal{R}$ に属するのは，ある $g \in G$ に対して $g(x) = y$ となるときとする．これは X 上の同値関係であり，同値類は G の軌道と呼ばれる．(いつものように，同値関係であることを確かめることは簡単である．各 $x \in X$ に対して，$\varepsilon(x) = x$ であるので，x は自分自身と関係している．x は y と関係しているならば，例えば，$g(x) = y$ とすると，$g^{-1}(y) = x$

---

1 ［訳注］きょうやく，と読む．

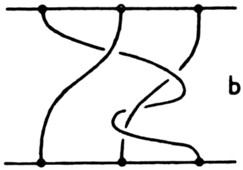


図 12.3

であるから，y は x と関係していることが示される．最後に，x は y と関係していて，y は z と関係している，例えば，$g(x) = y, g'(y) = z$ とすれば，$g'g(x) = g'(y) = z$ となり，これは x は z と関係していることを示す.）異なる軌道が常に X の分割をなすことは後に重要になる．また，このことは (12.2) によっても確かである．この点をより具体的にするために，X として $\mathbb{R}^3$，G として $A \in SO_3$ となる線型変換 f_A の群を取る．原点はすべての線型変換で動かないので，$\mathbf{0}$ の軌道は単に $\{\mathbf{0}\}$ である．直交変換が長さを保つことを覚えていれば，ゼロベクトルでない $\mathbf{x}$ の軌道は中心が原点で，半径が $\|\mathbf{x}\|$ である球面である．原点と異なる半径の球面とを合わせて，$\mathbb{R}^3$ の分割を実際になす．

同値関係による同値類として，最も自然に定義される元からなる群を紹介して，この章を終えるとしよう．

例 (vi)．一組の水平な平面から始めよう．これらには，上の平面には 3 つの点があり，下の平面に対応する 3 点が真下にある．上の点と下の点をつなぐ紐（ひも）を加える（図 12.3）．これらの紐は交点を決して持ってはいけない．また，各々の紐は 2 つの平面の間で，上下の平面に平行な平面とただ 1 度だけ交差してよい．このような配置は**組み紐** (braid) と呼ばれる．2 つの与えられた組み紐 b_1, b_2 に対して，「これらを掛け合わせて」新しい組み紐 b_1b_2 を図 12.4 のように b_1 の上に b_2 を載せることによって得ることができる．

紐が真下につながれるような自明な組み紐を e と表す．組み紐の本質的な性質は，その紐がお互いにからまる方法にある．それゆえ，自明な組み紐は上に定めた掛け算に対して，単位元として振舞う（図 12.5）．組み紐 b を下の平面に対して反転することにより，新しい組み紐を得る．これを b^{-1} と書く．$b^{-1}b$ は実際自明であることに注意しよう（図 12.6）．私たちは群の構造にとても近いところにいる．同値関係の概念が残りの正確さに欠けた部分を

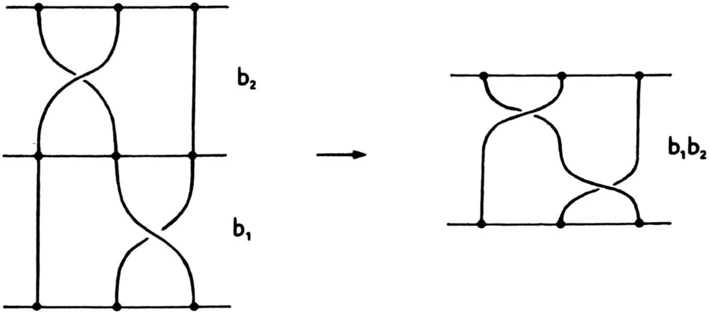


図 12.4

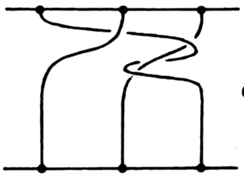


図 12.5

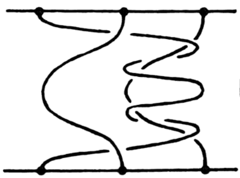


図 12.6

取り扱うのに理想的に向いている．

b_1 と b_2 が組み紐であるとする．b_1 の紐たちが b_2 の紐たちの上にくっつくまで連続的に変形できるとき，b_1 は b_2 と関係しているという．変形の間，紐たちは 2 つの水平な平面の間にとどまっていなければならず，これらの紐の端点は固定されたままであり，これらが交わることは許されない．読者が容易に確かめられるように，結果として得られる関係 $\mathcal{R}$ はすべての組み紐の集まりの上の同値関係であり，同値類は積

$$\mathcal{R}(b_1)\mathcal{R}(b_2) = \mathcal{R}(b_1 b_2)$$

に関して群をなす．$\mathcal{R}(e)$ が単位元で，$\mathcal{R}(b^{-1})$ が $\mathcal{R}(b)$ の逆元であるといっても何の驚きもないであろう．これが 3 つの紐についての**組み紐群** (braid group)B_3 である．もちろん，各正の整数 n に対して対応する群 B_n がある．

演習問題

12.1. 次の $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の部分集合のうち，$\mathbb{R}$ 上の同値関係はどれか？
(a) $\{(x, y) | x - y$ は偶数 $\}$.
(b) $\{(x, y) | x - y$ は有理数 $\}$.
(c) $\{(x, y) | x + y$ は有理数 $\}$.
(d) $\{(x, y) | x - y \geq 0\}$.

12.2. 次のうちのどれが 0 でない複素数全体の集合上の同値関係を定めるか？
(a) z が w と関係しているのは，zw が実数のとき．
(b) z が w と関係しているのは，z/w が実数のとき．
(c) z が w と関係しているのは，z/w が整数のとき．

12.3. 群 G と部分群 H で，$\{(x, y) | xy \in H\}$ が G 上の同値関係でないものを見つけよ．

12.4. 群 G と部分群 H の例で，$\{(x, y) | xyx^{-1}y^{-1} \in H\}$ が G 上の同値関係でないものを与えよ．

12.5. $\mathcal{R}$ を X 上の同値関係とする．与えられた $x \in X$ に対して，$y \in X$ を $(x, y) \in \mathcal{R}$ となるように選ぶ．性質 (b) により，$(y, x) \in \mathcal{R}$ となり，次に性質 (c) により，$(x, x) \in \mathcal{R}$ が示される．それゆえ，同値関係の最初の性質 (a) は余計なように思える．この議論の何が問題なのだろうか？

12.6. n を正の整数とし，n を法とした合同によって与えられる $\mathbb{Z}$ 上の同値関係を考える．x の同値類を $[x]$ と表し，これら 2 つの同値類の和を

$$[x] + [y] = [x + y]$$

によって定める．一見すると，この規則は，2 つの同値類から選ばれた特別な代表元に依存しているように見える．実際に，和は **well-defined**[2]であることを示せ．すなわち，$[x] = [x']$, $[y] = [y']$ ならば，$[x + y] = [x' + y']$ であることを示せ．同値類の集まりはこの操作によって，アーベル群をなし，結果として得られる群は $\mathbb{Z}_n$ に同型であることを証明せよ．(実際，多くの著者はこの方法で $\mathbb{Z}_n$ を定義することを好む.)

---

[2]　［訳注］well-defined という語は，定義が矛盾なく定まることを意味する．例えば，ここでは，代表元の取り方によらずに和が定まることを意味している．

12.7. G における H の左剰余類と右剰余類を以下の場合に求めよ.

$$G = A_4, \quad H = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \text{ のとき},$$
$$G = A_4, \quad H = \{\varepsilon, (123), (132)\} \text{ のとき}.$$

最初の場合では，左剰余類と右剰余類が一致するが，2 番目の場合ではそうはならないことを確かめよ.

12.8. G を有限群とし，H は G の部分群で，G の元のちょうど半分を含むものとする．$gH = Hg$ が G のすべての元 g に対して成り立つことを示せ.

12.9. ここに，整数から有理数を構成することを可能にする手段がある．整数の順序付けられた組 (m, n) で，2 番目の成分が 0 でないもののすべてのなす集合 X から始めよう．私たちは (m, n) が分数 m/n を表していると考えるのである．もちろん，多くの異なる順序付けられた組が同じ有理数を表すこともある．例えば，$(2, 3)$, $(4, 6)$, $(-6, -9)$ はすべて $\frac{2}{3}$ を表している．何とかしてこれらの組すべてを同一視しなければならない．そして，同値関係の概念が適切な道具となるのである．$mn' = m'n$ であるときはいつでも (m, n) は (m', n') と関係しているとしよう．これが X 上の同値関係であることを示せ．順序付けられた組 (m, n) の同値類を $[(m, n)]$ と書くと，分数の足し算と掛け算の規則をもとにして,

$$[(m, n)] + [(m_1, n_1)] = [(mn_1 + m_1 n, nn_1)],$$
$$[(m, n)] \cdot [(m_1, n_1)] = [(mm_1, nn_1)]$$

と定める．これら両方の操作は well-defined であること，同値類のすべてのなす集合は足し算に関してアーベル群をなすこと,「0 の同値類」 $[(0, n)]$ を取り除けば，残りは掛け算に関してアーベル群をなすこと，これらを確かめよ．各有理数は唯 1 つの同値類によって表され，私たちは今や有理数の代数的構造を構成したのである.

12.10. 例 (iv) で定義された共役の関係について考える．$G = D_4$ のときに共役類を求めよ．無限 2 面体群 D_∞ に対しても同様のことを試みよ.

12.11. 組み紐群 B_3 は無限群であり，アーベル群でなく，図 12.4 に示された 2 つの組み紐 b_1, b_2 によって生成されることを納得せよ.

12.12. B_3 の構成には，水平な一組の平面，上の平面上にある 3 つの点，それらに対応する真下の平面上の 3 つの点が含まれる．上の面の点と下の面の点に 1, 2, 3 と番号を付け，垂直方向に並べられた点が同じ番号を持つようにする．すると，組み紐の紐に沿っていくことは，S_3 の元を与える．このようにして構成された B_3 から S_3 への写像は全射で，B_3 の積を S_3 の積へと写すことを示せ．置換 (123) に写される 2 つの異なる組み紐を見つけよ.

第13章　コーシーの定理

ここに，11 章で約束したラグランジュの定理の主張の部分的な逆がある．

(13.1) コーシーの定理． p が有限群 G の位数の素因数であれば，G は位数 p の元を含む．

証明． $x \in G - \{e\}$ なる元で，$x^p = e$ となるものが必要である．G の元の順序付けられた列 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ で

$$x_1 x_2 \cdots x_p = e$$

となるものすべてのなす集合 X を考えよう．私たちの問題はこのような列で，$(e, e, \ldots, e)$ を除く，すべての成分が等しいものを見つけることである．X の大きさに関して注意深く調べることにより，これを成し遂げよう．

X はどれだけ大きいか？ もし，列 $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ が X に属するならば，$x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ を G から任意に選んでよい．というのも，このとき，x_p は $x_p = (x_1 x_2 \cdots x_{p-1})^{-1}$ によって完全に決まってしまうからである．よって，X における列の数は $|G|^{p-1}$ であり，これは p の倍数である．

以下のように定義される $X \times X$ の部分集合を $\mathcal{R}$ とする．順序付けられた組 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ に対して，$\mathbf{x}$ の成分を巡回的に置換することにより $\mathbf{y}$ を得ることができるとき，$(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は $\mathcal{R}$ に属する．別の言い方をすれば，$\mathbf{y}$ は次のいずれかである．

$$\begin{gathered}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \\ (x_p, x_1, \ldots, x_{p-1}) \\ \vdots \\ (x_2, \ldots, x_p, x_1).\end{gathered} \tag{$*$}$$

これら巡回置換で写された元は実際にすべて X に属することに注意せよ．例えば，

$$\begin{aligned} x_p x_1 \cdots x_{p-1} &= x_p(x_1 \cdots x_{p-1} x_p) x_p^{-1} \\ &= x_p e x_p^{-1} \\ &= e \end{aligned}$$

となり，これは $(x_p, x_1, \ldots, x_{p-1}) \in X$ となることを示す．この過程を繰り返すことにより，他の残りの元に関しても同様に扱える．$\mathcal{R}$ が X 上の同値関係であることや，列 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ の同値類 $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ はちょうど $(*)$ の列たちになることは容易に確かめられる．

ある列について，成分の巡回置換は常に p 個の異なる列を与えるだろうか？ $\mathbf{e} = (e, e, \ldots, e)$ の場合は間違いなくそのようなことはあり得ない．というのも，巡回的に置換をしても，成分は何も変わらないからである．それゆえ，$\mathcal{R}(\mathbf{e})$ は唯 1 つの元からなる．互いに異なる $\mathcal{R}$ の同値類は X を分割する．よって，これらの同値類の大きさを足し上げれば，X の元すべての個数を与える．もし $\mathcal{R}(\mathbf{e})$ 以外のすべての同値類が p 個の元を含むならば，X の大きさは p を法として 1 に合同となるだろう．これは先ほど計算した結果に矛盾する．それゆえ，$\mathbf{e}$ 以外の列 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ で，その同値類が p 個より少ない元を含むものがなければならない．よって，$(*)$ における巡回置換のうち 2 つは等しい．例えば，

$$(x_{r+1}, \ldots, x_p, x_1, \ldots, x_r) = (x_{s+1}, \ldots, x_p, x_1, \ldots, x_s).$$

$r > s$ と仮定して，$p - r$ 回巡回的に逆に戻すと，

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (x_{k+1}, \ldots, x_p, x_1, \ldots, x_k)$$

となる．ここで，$k = p - r + s$ である．対応する成分が等しいとおけば，$1 \leq i \leq p$ に対して，$x_i = x_{k+i \pmod p}$ となることがわかり，結果として，

$$x_1 = x_{k+1} = x_{2k+1} = \cdots = x_{(p-1)k+1}$$

を得る．ここで，添え字は p を法として読む．$ak+1$ と $bk+1$ が p を法として合同であるとする．ここで，$0 \leq a < b \leq p-1$ である．すると，p は $(b-a)k$ を割り切る．が，これは不可能である．というのも，p は素数であり，$b-a$ と k の両方とも p より小さいからである．それゆえ，数

$$1, k+1, 2k+1, \ldots, (p-1)k+1$$

は p を法として読むとき，すべて異なる．これらは p 個あるので，p を法として読めば，多少並べ替えることになるかもしれないが，単に $1, 2, \ldots, p$ となる．結局，$x_1 = x_2 = \cdots = x_p$ となり，必要とされていたように，$x_1^p = e$ と結論される．(あと少し道具が私たちの手に入れば，この類の議論は効率よくできるようになるだろう．17 章を見よ.) □

コーシーの定理の応用として，位数 6 の群は巡回群か 2 面体群のいずれかでなければならないことを示そう．より正確には次のとおりである．

(13.2) 定理. 位数 6 の群は $\mathbb{Z}_6$ に同型であるか，D_3 に同型であるかのいずれかである．

証明. G を 6 個の元を含む群とする．コーシーの定理を使って，位数 3 の元 x と位数 2 の元 y を選ぶ．右剰余類 $\langle x\rangle$, $\langle x\rangle y$ は 6 個の元 e, x, x^2, y, xy, x^2y を与え，これで G の元をすべて尽くす．ここで，yx はこれら 6 つのうちの 1 つであるが，$\langle x\rangle$ に属さず，y と等しくないことも確かである．もし，$yx = xy$ ならば，(10.2) により，G は $\langle x\rangle \times \langle y\rangle$ に同型であり，それゆえ，$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ に同型である．これは (10.1) により，巡回群である．一方，$yx = x^2y$ ならば，(4 章の記号を使えば) x を r へ，y を s へ変えれば，G から D_3 への同型写像を与える． □

p が奇素数であれば，位数 $2p$ の任意の群は巡回群か 2 面体群のいずれかであることを示すことはそれほど難しくはない (15 章を見よ)．

私たちは今や小さな位数の群についてずいぶんと情報を得た．位数 2, 3, 5, 7 の任意の群は (11.3) により巡回群であり，位数 4 の群は $\mathbb{Z}_4$ かクラインの群のいずれかに同型であり (演習問題 10.12 を見よ)，位数 6 の任意の群は巡回群か 2 面体群である．位数 8 に関する状況はより複雑である．私たちはすでに 4 つの群に出会ってきた．これらの各々は 8 個の元を持つ．つまり，$\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, D_4．ここに 5 番目がある．4 元数 (quarternion) (あるいは超複素数) は $a + bi + cj + dk$ の形 (ここで，a, b, c, d は実数) で表され，i, j, k は

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k \qquad (*)$$

を満たすものである．4 元数全体のなす集合は $\mathbb{H}$ と表される．8 個の記号 $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ は，$(*)$ に従って掛け合わされると，群 Q をなす．これを **4 元数群** (quarternion group) と呼ぶ．その乗法表は以下に示されるとおりで

ある．

	1	−1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	−1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
−1	−1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	−1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	−1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	−1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	−1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	−1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	−1

Q はアーベル群ではない（それゆえ，これは $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の 1 つに同型ではあり得ない）．そして，-1 が唯 1 つの位数 2 の元であるので，これは D_4 に同型にならない．後者は 5 つの位数 2 の元を含む．

(13.3) 定理． 位数 8 の群は次のうちの 1 つに同型である．

$$\mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,\ D_4,\ Q.$$

証明． G を 8 個の元を持つ群とする．位数 8 の元が存在するならば，このとき G は $\mathbb{Z}_8$ に同型である．**今，G の元の中で，最も大きな位数は 4 であるとしよう．** 位数 4 の元 x を選び，$G - \langle x \rangle$ から元 y を選ぼう．剰余類 $\langle x \rangle$, $\langle x \rangle y$ は G の元すべてを尽くし，元は

$$e, x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, x^3y$$

となる．yx は，$\langle x \rangle$ に含まれないこと，($yx = y$ ならば，$x = e$ なので）y に等しくなり得ないこと，x^2y に等しくなり得ないこと（なぜならば，$yx = x^2y$ は $x = y^{-1}x^2y$ となり，これはまた，$x^2 = y^{-1}x^2yy^{-1}x^2y = e$ を与えるからである）はわかっている．それゆえ，yx は xy か x^3y のいずれかである．さらに，元 y の位数は 2 または 4 である．y^2 は $\langle x \rangle y$ に属さないこと（$y \notin \langle x \rangle$ だから）と y^2 は x にも x^3 にも等しくなり得ないこと（なぜならば，y の位数は 8 ではないから）に注意せよ．すると，y が位数 4 を持つならば，このとき，$y^2 = x^2$ である．それゆえ，4 つの可能性があることがわかる：

(i) もし $yx = xy$ かつ $y^2 = e$ ならば，群はアーベル群となり，$x \to (1, 0)$, $y \to (0, 1)$ は G と $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ の間の同型写像を導く．

(ii) もし $yx = x^3y$ かつ $y^2 = e$ ならば，(いつもの記号で) $x \to r$, $y \to s$ は G と D_4 の間の同型写像を定める．

(iii) もし $yx = xy$ かつ $y^2 = x^2$ ならば，群はアーベル群であり，xy^{-1} は位数 2 を持ち，$x \to (1,0)$, $xy^{-1} \to (0,1)$ は G と $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ の間の同型写像を導く．

(iv) 最後に，もし，$yx = x^3y$ かつ $y^2 = x^2$ ならば，$x \to i$, $y \to j$ は G と Q の間の同型写像を定める．

$G - \{e\}$ のすべての元が位数 2 を持つならば，どうなるだろうか？ この場合，G はアーベル群である．$G - \{e\}$ から x, y, z を選んで，xy は z に等しくないとする．部分群 $H = \{e, x, y, xy\}$ は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ に同型であり，もし $K = \langle z \rangle$ ならば，$HK = G$, $H \cap K = \{e\}$ となることは容易に確かめられる．それゆえ，(10.2) により，$G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ となる． □

演習問題

13.1. コーシーの定理の証明に使われた関係 $\mathcal{R}$ は実際に同値関係であることを確かめよ．

13.2. もし $p_1, p_2, \ldots, p_s$ が互いに異なる素数ならば，位数 $p_1p_2\cdots p_s$ のアーベル群は巡回群でなければならないことを示せ．

13.3. 定理 13.2 において，位数 6 の群は巡回群であるか 2 面体群でなければならないことを示した．6 個の元 e, x, x^2, y, xy, x^2y を得るまで定理の証明をたどれ．xy の位数については 3 つの可能性がある．そのうち，1 つは $\mathbb{Z}_6$ を導き，2 番目は D_3 を導き，3 番目は矛盾を導くことを示せ．

13.4. 位数 10 の群は $\mathbb{Z}_{10}$ に同型であるか D_5 に同型であるかのいずれかであることを証明せよ．

13.5. G を位数 $4n+2$ の群とする．コーシーの定理，ケイリーの定理と演習問題 6.6 を用いて，G が位数 $2n+1$ の部分群を含むことを示せ．

13.6. Q のすべての真部分群は巡回群であることを確かめよ．

13.7. 4 元数 $q = a + bi + cj + dk, q' = a' + b'i + c'j + d'k$ が与えられたとき，

$$\begin{aligned} q + q' &= (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k, \\ q \cdot q' &= (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - dc')i \\ &\qquad + (ac' - bd' + ca' + db')j + (ad' + bc' - cb' + da')k \end{aligned}$$

と定める．$\mathbb{H}$ は足し算に関してアーベル群をなし，$\mathbb{H} - \{0\}$ は掛け算に関し

て群（アーベル群ではないが）となることを証明せよ．対応

$$a + bi + cj + dk \longleftrightarrow (a, b, c, d)$$

は加法群 $\mathbb{H}$ から $\mathbb{R}^4$ への同型写像であることを示せ．

13.8. 4 元数 $q = a + bi + cj + dk$ の共役は $q^* = a - bi - cj - dk$ と定められる．q の長さは $q \cdot q^*$ の平方根である．つまり，$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ である．長さが 1 の 4 元数の全体は $\mathbb{H} - \{0\}$ の部分群をなすことを示せ．この群を S^3 と表そう．なぜなら，この群は，$\mathbb{H}$ と $\mathbb{R}^4$ を同一視したとき，$\mathbb{R}^4$ の中の単位球面に対応するからである．

13.9. 対応

$$a + bi + cj + dk \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix}$$

は S^3 と SU_2 の間の同型写像を定めることを証明せよ．

13.10. S^3 の部分群 Q に対応する SU_2 の元を書き下せ．S^3 の部分群で C に同型なものを見つけよ．

13.11. $\mathbb{H}$ の元で，$bi+cj+dk$ の形のものは純 4 元数と呼ばれる．すべての $q \in \mathbb{H}-\{0\}$ に対して，$q \cdot (bi + cj + dk) \cdot q^{-1}$ は純 4 元数であることを示せ．

13.12. $\mathbb{R}^3$ において $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ が与えられているとき，$q(\mathbf{x})$ で 4 元数 $x_1 i + x_2 j + x_3 k$ を表すものとする．もし $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ であるならば，

$$q(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + q(\mathbf{x}) \cdot q(\mathbf{y})$$

となることを証明せよ[1]．

---

[1] ［訳注］ここで，$\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ は $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の外積を表す．

第14章　共役

共役という関係は12章で導入され，同値関係であることが示された．定義を復習しよう．群 G の元 x, y が与えられたとき，x **は** y **に共役であるとは**，ある $g \in G$ に対して $gxg^{-1} = y$ を満たすときをいう．その同値類は**共役類**と呼ばれる．いくつかの具体的な群に対して共役類を求めることから始めよう．

固定された元 $g \in G$ に対して，$x \to gxg^{-1}$ によって与えられる G から G への関数は同型写像であり，g **による共役** (conjugation by g) と呼ばれる．(この写像は可逆であるから，全単射であり，逆写像は g^{-1} による共役として与えられる．G の代数的構造を保つことは，任意の2つの元 $x, y \in G$ に対して

$$g(xy)g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1})$$

が成り立つことからわかる.）同型写像は元の位数を保つので，同じ共役類に属する元は**同じ位数**を持たなければならないことがわかる．

例 (i)．G がアーベル群で x が G の元であるとき，**すべての** $g \in G$ に対して，$gxg^{-1} = x$ である．それゆえ，x だけが自分自身と共役になり，共役類は1つの元からなる集合 $\{x\}$ となる．ここで，$x \in G$ である．

例 (ii)．G を2面体群 D_6 に取り，4章の記号を採用する．D_6 の元は，

$$e,\ r,\ r^2,\ r^3,\ r^4,\ r^5,$$
$$s,\ rs,\ r^2s,\ r^3s,\ r^4s,\ r^5s$$

であり，掛け算に関しては，$r^6 = e$, $s^2 = e$, $sr = r^5s$ であることを知ってしまえば，完全に定まる．r のべき乗，例えば，r^a, $1 \leq a \leq 5$ の共役類を見つけるには，D_6 のすべての元 g に対して，gr^ag^{-1} を計算しなければならな

い．もし g が単位元または r のべき乗であれば，r^a を再び得る．$g = s$ と取れば，($s^{-1} = s$ であることを覚えていれば，)

$$sr^as = r^{6-a}s^2 = r^{6-a}$$

を得る．最後に，$g = r^bs,\ 1 \leq b \leq 5$ であれば，

$$\begin{aligned}(r^bs)r^a(r^bs)^{-1} &= r^b(sr^as)r^{6-b}\\ &= r^b(r^{6-a})r^{6-b}\\ &= r^{6-a}\end{aligned}$$

となる．それゆえ，r^a の共役類は $\{r^a, r^{6-a}\}$ となる．残りの元に対しては，次の式に注目しよう．

$$r^bsr^{-b} = r^br^bs = r^{2b}s,$$

$$r^b(rs)r^{-b} = r^{b+1}r^bs = r^{2b+1}s.$$

r^bs による共役は s を $r^{2b}s$ へ写し，rs を $r^{2b-1}s$ へ写す．それゆえ，元 s, r^2s, r^4s は 1 つの共役類をなす．rs, r^3s, r^5s についても同様である．まとめると，D_6 の共役類は，

$$\{e\}, \{r, r^5\}, \{r^2, r^4\}, \{r^3\},$$
$$\{s, r^2s, r^4s\}, \{rs, r^3s, r^5s\}$$

となる．この時点で，演習問題 14.1 と 14.2 を解くことを薦める．

例 (iii)．S_n の 2 つの元は，それらが互いに素な巡回置換の積として分解されるときに，同じ 2-サイクルの数，同じ 3-サイクルの数などなどを持つとき，同じ**サイクル構造**を持つという．$\theta, \varphi \in S_n$ が同じサイクル構造を持つとき，θ のサイクル構造の真下に φ のサイクル構造を書いて，長さが減少する順に構成するサイクルを取ることにする．両方ともに，長さ 1 のサイクルとしての置換により固定される整数を含む．g を S_n の元で，θ に現れる整数を真下に書かれた φ の整数へ写す置換であるとする．このとき，$g\theta g^{-1} = \varphi$ である．なぜならば，φ から θ へ整数を上げ，それを θ の中で，並びに沿って，1 つ位置をずらしてから，それを φ へ落として戻すことは，φ の中で 1 つ位置を動かすことと同じことだからである．**それゆえ，同じサイクル構造を持つ置換は S_n において共役である．**

ここで，具体的な計算をしよう．S_9 の 2 つの置換 $\theta = (67)(2539)(14)$,

$\varphi = (12)(38)(5467)$ はともに，2つの互換と1つの4-サイクルからなる同じサイクル構造を持っている．上で述べた手順によると，

$$\begin{array}{c}(2539)(67)(14)(8)\\ \downarrow g\\ (5467)(12)(38)(9)\end{array}$$

より，$g = (136)(254897)$ と読み取れる．ゆえに，

$$\begin{aligned}g\theta g^{-1}(1) &= g\theta(6)\\ &= g(7)\\ &= 2 = \varphi(1), \text{など}\end{aligned}$$

となる．元 g の取り方は1通りではない．θ を $(2539)(14)(67)(8)$ と書いて，φ を前と同じままにしておけば，$g = (254)(36)(789)$ となる．

逆に，共役な置換は同じサイクル構造を持つ． なぜこれが成り立つかを見るために，S_n の元を $\theta = \theta_1\theta_2\cdots\theta_t$ と互いに素な巡回置換の積として書く．任意の $g \in S_n$ に対して，

$$\begin{aligned}g\theta g^{-1} &= g(\theta_1\theta_2\cdots\theta_t)g^{-1}\\ &= (g\theta_1 g^{-1})(g\theta_2 g^{-1})\cdots(g\theta_t g^{-1})\end{aligned}$$

となる．θ_i が長さ k を持つと仮定して，例えば，$\theta_i = (a_1a_2\cdots a_k)$ として，このとき，

$$\begin{aligned}g\theta_i g^{-1}(g(a_1)) &= g\theta_i(a_1) = g(a_2),\\ g\theta_i g^{-1}(g(a_2)) &= g\theta_i(a_2) = g(a_3),\\ &\vdots\\ g\theta_i g^{-1}(g(a_k)) &= g\theta_i(a_k) = g(a_1)\end{aligned}$$

となる．また，m が $g(a_1), \ldots, g(a_k)$ のどれでもないならば，θ_i は $g^{-1}(m)$ を固定し，

$$g\theta_i g^{-1}(m) = gg^{-1}(m) = m$$

となる．それゆえ，$g\theta_i g^{-1} = (g(a_1)g(a_2))\cdots g(a_k))$ となり，θ_i と同じ長さの巡回置換になる．$g\theta_1 g^{-1}, g\theta_2 g^{-1}, \ldots, g\theta_t g^{-1}$ は明らかに互いに素であるので，$g\theta g^{-1}$ は θ と同じサイクル構造を持つと結論できる．

例 (iv)．前の例から，S_4 の共役類は

$$\begin{aligned}
&\{\varepsilon\},\\
&\{(12),(13),(14),(23),(24),(34)\},\\
&\{(123),(132),(142),(124),(134),(143),(243),(234)\},\\
&\{(1234),(1432),(1243),(1342),(1324),(1423)\},\\
&\{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}
\end{aligned}$$

であることがわかる．A_4 の共役類についてはどうだろうか？ 私たちは注意深くならなければならない．$\theta, \varphi \in A_4$ が同じサイクル構造を持つとき，確かに元 $g \in S_4$ で $g\theta g^{-1} = \varphi$ となるものが存在するが，この性質を持つ偶置換を作ることができないかもしれない．例えば，$g(123)g^{-1} = (132)$ ならば，このとき，$(g(1)g(2)g(3)) = (132)$ であり，g は互換 $(23), (13), (12)$ のうちのどれかでなければならない．それゆえ，g は A_4 に属し得ない．A_4 の共役類は，

$$\begin{aligned}
&\{\varepsilon\},\\
&\{(123),(142),(134),(243)\},\\
&\{(132),(124),(143),(234)\},\\
&\{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}
\end{aligned}$$

であることは素早く確かめられる．これらの共役類には簡単な幾何学的解釈がある．A_4 を，いつものように，正 4 面体の回転対称性と同一視する．頂点の 1 つに関する対称性の軸が与えられたとき，問題となっている頂点から見て向かいにある面が時計回りに動いて見えるように，正 4 面体を $2\pi/3$ 回転させることができる．この種の 4 つの回転は共役であり，面が反時計回りに動いていく残りの 4 つの回転についても同様である．これらの共役類は，4 つの 3-サイクルのなす 2 つの異なる共役類に対応している．恒等的な回転はそれ自身で 1 つの共役類をなし，残りの共役類は，向かい合う辺の中点によって定まる 3 つの軸について，それぞれ π 回転する対称性からなる．

例 (v)．G を O_2 と取り，

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad B_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

とする．A_θ は θ に関する反時計回りの回転を表し，B_φ は x 軸の正方向から

$\varphi/2$ の角度だけ傾いた直線についての反転を表すことを思い出そう．共役な行列は同じ行列式の値を持つ．それゆえ，各共役類はすべて回転からなるか，すべて反転からなるかとなる．

$$A_\theta B_\varphi A_\theta^{-1} = A_\theta B_\varphi A_{-\theta} = B_{\varphi+2\theta}$$

であるから，任意の 2 つの B は共役であることがわかる．また，

$$A_\varphi A_\theta A_\varphi^{-1} = A_\theta,$$

$$B_\varphi A_\theta B_\varphi^{-1} = B_\varphi A_\theta B_\varphi = A_{-\theta}$$

である．これは回転行列は $\{A_\theta, A_{-\theta}\}$ の形の共役類に分けられることを示す．したがって，O_2 の異なる共役類は，

$$\begin{aligned}&\{I\},\\ &\{A_\theta, A_{-\theta}\},\ 0 < \theta < \pi,\\ &\{A_\pi\},\\ &\{B_\varphi | 0 \le \varphi < 2\pi\}\end{aligned}$$

となる．

次の章で共役類のみから作られる部分群について学ぶ．そのようなものの 1 つとしては，いわゆる，群の中心がある．群 G の**中心** (center) は G のすべての元と交換する元全体である．たいていの場合，$Z(G)$ と表され，$Z(G) = \{x \in G | xg = gx, \forall g \in G\}$ ということである．

(14.1) 定理. 中心は G の部分群であり，唯 1 つの元を含む共役類からなる．

証明. $x, y \in Z(G)$ で $g \in G$ ならば，

$$\begin{aligned}gxy^{-1} &= xgy^{-1} \quad (x \in Z(G) \text{ だから})\\ &= x(yg^{-1})^{-1}\\ &= x(g^{-1}y)^{-1} \quad (y \in Z(G) \text{ だから})\\ &= xy^{-1}g\end{aligned}$$

となる．それゆえ，xy^{-1} は $Z(G)$ に属する．確かに，$e \in Z(G)$ である．したがって，(5.1) により，中心は部分群である．$xg = gx$ となるのは $gxg^{-1} = x$ となるときに限るから，x の共役類が 1 つの元からなる集合 $\{x\}$ となるとき

に限り，$x \in Z(G)$ となることがわかる． □

例 (vi)．任意のアーベル群の中心は，その群全体である．

例 (vii)．$n \geq 3$ に対して，S_n の中心は自明な部分群 $\{\varepsilon\}$ である．このことは，例 (iii) から従う．

例 (viii)．D_6 の中心は，例 (ii) で見たように，$\{e, r^3\}$ である．n が偶数のときと奇数のときの違いに気を付けながら，読者は一般の場合に D_n の中心を求めてもらいたい（演習問題 14.10）．

例 (ix)．GL_n の中心は単位行列のすべての（ゼロでない）スカラー倍からなる（演習問題 14.11）．

演習問題

14.1. D_5 の共役類を求めよ．

14.2. n が偶数のときと n が奇数のときの違いに気を付けながら，D_n の共役類の構造を説明せよ．

14.3. $\varphi : G \to G'$ を同型写像とする．φ は G の各共役類を G' の共役類に写すことを証明せよ．

14.4. S_6 における異なる共役類の数を計算せよ．そして，各共役類に対して，その代表となる置換を書き下せ．元 $g \in S_6$ で，

$$g(123)(456)g^{-1} = (531)(264)$$

となるものを見つけよ．A_6 において $(123)(456)$ は $(531)(264)$ と共役であるが，$(12345)(678)$ と $(43786)(215)$ は A_8 において共役でないことを示せ．

14.5. A_5 における 3-サイクルは唯 1 つの共役類をなすことを証明せよ．A_5 における 2 つの 5-サイクルで共役でないものを見つけよ．

14.6. S_8 の中で，$(12)(345)(678)$ と同じサイクル構造を持つ元はいくつあるか？

14.7. 4 元数群 Q の共役類と中心を求めよ．S^3 の中心は何か？

14.8. 演習問題 6.10 を用いて，$n \geq 3$ のとき，S_n の中心は自明な部分群 $\{\varepsilon\}$ であることを示せ．

14.9. 群 A_3 はアーベル群である．それゆえ，$Z(A_3) = A_3$ である．n が 3 より大きいとき，$Z(A_n) = \{\varepsilon\}$ を証明せよ．

14.10. 演習問題 14.2 において，自分の計算から D_n の中心を読み取れ．n が奇数のときは $Z(D_n)$ は $\{e\}$ であり，n が偶数なら，$\{e, r^{n/2}\}$ となることがわか

るはずである．

14.11. $n \times n$ の単位行列から得られる行列で，対角成分の 1 つを -1 に変えたものか，2 つの行を入れ替えたものを考える．これらの行列はすべて可逆であることを示し，これを使って $GL_n(\mathbb{R})$ の中心を計算せよ．

14.12. O_n と SO_n の中心を見つけよ．U_n の中心は $e^{i\theta} I_n$ の形の行列すべてからなることを証明せよ．ここで，$\theta \in \mathbb{R}$ で，I_n は $n \times n$ の単位行列を表す．

第15章　商群

共役類のみから作られる部分群のために，この章を割こう．

群 G の部分群 H は，H が G の共役類の和集合であるときに，**正規部分群** (normal subgroup) と呼ばれる．

正規部分群は重要である．なぜならば，その左剰余類が自然な方法で群をなすからである．X と Y が G の部分集合であるとき，それらを掛け合わせてすべての積 xy ($x \in X$, $y \in Y$) の集合 XY を作ることができる．

(15.1) 定理． *H が G の正規部分群ならば，G における H のすべての左剰余類の集合は，上の掛け算により群をなす．*

証明． 2 つの左剰余類の積はまた左剰余類である．なぜならば，

$$(xH)(yH) = xyH \tag{$*$}$$

がどのような 2 つの元 $x, y \in G$ に対しても成り立つからである．しばらくの間，この式を認めることにする．積の結合法則は G の結合法則から従い，左剰余類 $eH = H$ は単位元として振舞い，$x^{-1}H$ は各 $x \in G$ に対して，xH の逆元となる．それゆえ，確かに群を得る．

では，なぜ $(*)$ が成り立ち，それが，H が G の**正規部分群**であるという仮定と何の関係があるのか？ $(xH)(yH)$ の各元は，ある $h, h' \in H$ に対して，$xhyh'$ の形をしている．これを

$$xy(y^{-1}hy)h'$$

と書き直すと，$y^{-1}hy$ は h の**共役**であることに気付く．仮定により，部分群 H は G の正規部分群であり，それゆえ，h のすべての共役類を含む．よって，ある $h'' \in H$ に対して，$y^{-1}hy = h''$ であり，

$$xhyh' = xy(y^{-1}hy)h' = xy(h''h')$$

を与える．これで，$xhyh'$ は xyH に属することがわかる．これまでの議論で，$(xH)(yH) \subseteq xyH$ がわかった．逆の包含関係を確かめるのはもっと簡単で，任意の部分群 H に対して成り立つ．xyH の各元はある $h \in H$ に対して xyh の形をしている．これを $(xe)(yh)$ と書き直せば，この元は $(xH)(yH)$ に属することを示しており，$xyH \subseteq (xH)(yH)$ を導くことになる．以上で，議論は完了である．□

H が G の正規部分群であるとき，$H \triangleleft G$ と書く．上で導入された，G における H の左剰余類のなす群は G の H による**商群** (quotient group)（あるいは因子群 (factor group)）と呼ばれ，G/H と表される．G における H の左剰余類は G の分割であったことを思い出そう．これら各剰余類は G/H における **1 つの元**を表しており，それは「G を H で割った（余り）」という意味なのである．

例 (i)．H を D_6 の部分群で，元 r^3 によって生成されるものとする．このとき，H は D_6 の正規部分群である．というのも，これは共役類 $\{e\}$ と $\{r^3\}$ で作られているからである．これら 6 つの異なる左剰余類は，

$$\begin{aligned}
&eH = \{e, r^3\},\ rH = \{r, r^4\},\ r^2H = \{r^2, r^5\},\\
&sH = \{s, sr^3\} = \{s, r^3s\},\ rsH = \{rs, r^4s\},\\
&r^2sH = \{r^2s, r^5s\}
\end{aligned}$$

となる．これらが D_6/H の元である．掛け算の定義により，

$$\begin{aligned}
(rH)(sH) &= \{xy | x \in rH, y \in sH\}\\
&= \{rs, rr^3s, r^4s, r^4r^3s\}\\
&= \{rs, r^4s\}\\
&= rsH
\end{aligned}$$

となり，(15.1) の $(*)$ により予想されたとおりになる．剰余類を

$$eH, rH, (rH)^2, sH, (rH)(sH), (rH)^2(sH)$$

と書くと，

$$\begin{aligned}
(rH)^3 &= r^3H = eH,\\
(sH)^2 &= s^2H = eH,\\
(sH)(rH) &= srH = r^2sH = (rH)^2(sH)
\end{aligned}$$

が確かめられるので，商群 D_6/H は D_3 に同型であると結論できる．

例 (ii)．共役類 $\{\varepsilon\}$ と $\{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$ は A_4 の正規部分群 J をなす．3 つの左剰余類 $\varepsilon J,(123)J,(132)J$ があり，商群 A_4/J は $\mathbb{Z}_3$ に同型である．

例 (iii)．アーベル群のすべての部分群は正規部分群である．なぜならば，この場合は，共役類が単に群の元となるからである．n を正の整数とし，$\mathbb{Z}$ の部分群 $n\mathbb{Z}$（整数をすべて n 倍したもの）を考える．n 個の異なる左剰余類

$$0+n\mathbb{Z},1+n\mathbb{Z},\ldots,(n-1)+n\mathbb{Z}$$

があり，これらは，

$$(x+n\mathbb{Z})+(y+n\mathbb{Z})=(x+y)+n\mathbb{Z}$$

と組み合わせると，商群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ をなす．元 $1+n\mathbb{Z}$ は群全体を生成する．ゆえに，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}_n$ に同型である．

G の部分群 H が正規であることを確かめたければ，G のすべての共役類を求めることを最初に行うのではなく，

$$\text{すべての } h\in H \text{ と } g\in G \text{ に対して，} ghg^{-1}\in H$$

となることを示すことによって，正規であることを確かめることができる．例えば，SO_n は O_n の正規部分群である．なぜならば，行列式の値が $+1$ である行列のすべての共役は再び行列式の値が $+1$ となるからである．次の結果を用いることにより，しばしばより効率的に正規であることを確かめることができる．

(15.2) 定理．H を G の部分群とし，X を G の生成元の集合で，G が無限であれば，各元の逆元を含むようなものとする．このとき，$xhx^{-1}\in H$ がすべての $h\in H,x\in X$ について成り立てば，H は G の正規部分群である．

証明．$h\in H$ ならば，すべての共役 ghg^{-1} もまた H に属することを示さなければならない．g を積 $x_1x_2\cdots x_t$ と表す．ここで，各 x_i は X の元である．すると，

$$\begin{aligned} ghg^{-1}&=(x_1x_2\cdots x_t)h(x_1x_2\cdots x_t)^{-1}\\ &=x_1x_2\cdots x_thx_t^{-1}\cdots x_2^{-1}x_1^{-1}\end{aligned}$$

となり，g による共役は X の元による共役の繰り返しということになる．仮定により，X の元で共役を取る度に，H の別の元が作られる．それゆえ，ghg^{-1} は確かに H に属する．□

例 (iv)．r^2 で生成される D_n の部分群 H は，正規部分群である．$X = \{r, s\}$ と取り，r^2 のべき乗を r または s で共役を取ると，再び r^2 のべき乗が得られることが確かめられる．もし，n が**奇数**であれば，このとき，$H = \langle r^2 \rangle = \langle r \rangle$ となり，よって，D_n/H は 2 つの元 H, sH を持ち，$\mathbb{Z}_2$ に同型である．n が**偶数**であれば，4 つの異なる左剰余類 H, rH, sH, rsH がある．

$$
\begin{aligned}
(rH)^2 &= r^2H = H \qquad (r^2 \in H \text{ だから}),\\
(sH)^2 &= s^2H = H,\\
(rsH)^2 &= (rs)^2H = H
\end{aligned}
$$

であることに注目しよう．したがって，各元の 2 乗が単位元となるような位数 4 の群が得られた．よって，D_n/H は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ に同型である．

私たちは選んで左剰余類を扱ってきた．しかし，次の結果は H が G の正規部分群であるのは，その左剰余類と右剰余類が一致するときに限るということを示している．

(15.3) 定理．G の部分群 H が正規であるための必要十分条件は，すべての $x \in G$ に対して $xH = Hx$ となることである．

証明．H が正規部分群だと仮定する．$x \in G, h \in H$ が与えられたとき，共役 $xhx^{-1}, x^{-1}hx$ は H に属さなければならない．それゆえ，

$$xh = (xhx^{-1})x \in Hx$$

となる．よって，$xH \subseteq Hx$ となる．同様にして，$hx = x(x^{-1}hx) \in xH$ は逆の包含関係 $Hx \subseteq xH$ を与える．次に，すべての $x \in G$ に対して，$xH = Hx$ と仮定する．もし，$h \in H, x \in G$ ならば，共役 xhx^{-1} は

$$(xH)x^{-1} = (Hx)x^{-1} = H$$

に属する．よって，H は G の正規部分群でなければならない．□

このことは，G における H の右剰余類を $(Hx)(Hy) = Hxy$ なる掛け算により，G/H の元と等しく考えることができることを意味する．G の部分

群 H の**指数** (index) とは，G における H の異なる左（あるいは右）剰余類の数のことである．もし H が正規部分群でなくても，左右どちらの剰余類を用いるかは関係ない．なぜならば，対応 $xH \to Hx^{-1}$ は左剰余類と右剰余類の間の全単射となるからである．

(15.4) 定理. G における H の指数が 2 に等しいならば，このとき，H は G の正規部分群であり，商群は G/H は $\mathbb{Z}_2$ に同型である．

証明. すべての $x \in G$ に対して，$xH = Hx$ を示そう．$x \in H$ であれば，これは明らかである．$x \in G - H$ ならば，左剰余類 H, xH は G の分割をなす．しかし，H と Hx もまた G の分割である．それゆえ，xH は求められていたように Hx と等しくなければならない．異なる剰余類は 2 つしかないので，商群は位数 2 を持ち，それゆえ，$\mathbb{Z}_2$ と同型である．□

例 (v). A_n は S_n の正規部分群である．

例 (vi). r によって生成される部分群は D_n の正規部分群である．

例 (vii). SO_n が O_n の正規部分群であることを見るのは，これで 2 度目である．O_n における SO_n の指数は 2 に等しい．なぜならば，剰余類 ISO_n, USO_n で O_n を埋め尽くすからである．ここで，I は単位行列で，U は I から対角成分の最後の 1 を -1 に変えたものである．

(15.5) 定理. p が奇素数ならば，位数 $2p$ の任意の群は巡回群であるか 2 面体群である．

証明. コーシーの定理を使って，位数 p の元 x と位数 2 の元 y を選ぶ．右剰余類 $\langle x\rangle, \langle x\rangle y$ は $2p$ 個の元 $e, x, \ldots, x^{p-1}, y, xy, \ldots, x^{p-1}y$ を与え，これらで群を埋め尽くす．$\langle x\rangle$ は正規部分群である．なぜならば，その指数が 2 に等しいからである．ラグランジュの定理により，xy の位数は $2p$ か p か 2 である．もし xy が位数 $2p$ であれば，群は巡回群となる．もし位数が 2 であれば，このとき，$xyxy = e$ となり，$yx = x^{-1}y$ となるから，2 面体群 D_p に同型な群を得る．xy は位数 p を持ち得ないことを主張する．というのも，$(xy)^p = e$ となるとすると，

$$\langle x\rangle = \langle x\rangle(xy)^p = (\langle x\rangle xy)^p = (\langle x\rangle y)^p = \langle x\rangle y^p = \langle x\rangle y$$

となり，$y \in \langle x\rangle$ となるので矛盾を得る．□

ここで方向を変えて，任意の群 G を「アーベル群化」させる方法について述べよう．$xyx^{-1}y^{-1}$ の形の G の元は**交換子** (commutator) と呼ばれる．すべての交換子で生成される部分群は G の**交換子群** (commutator subgroup) $[G, G]$ と呼ばれる．x と y が交換するのは $xyx^{-1}y^{-1}$ が単位元となるときに限るので，$[G, G]$ の大きさは G が可換であることからどれだけずれているかを測る目安と考えられる．どのようなアーベル群の交換子群も単なる自明な部分群 $\{e\}$ にすぎない．

例 (viii). S_n における各交換子は明らかに偶置換である．それゆえ，$[S_n, S_n]$ は A_n に含まれる．どのような 3-サイクルも交換子である．なぜならば，

$$(abc) = (ab)(ac)(ab)(ac)$$

となるからである．3-サイクルは，$n \geq 3$ のとき，A_n を生成する．これにより S_n の交換子群は A_n の全体となることが結論できる．

(15.6) 定理. 交換子群は正規部分群であり，商群 $G/[G, G]$ はアーベル群である．もし，H が G の正規部分群で，G/H がアーベル群となるならば，このとき，$[G, G]$ は H に含まれる．

証明. 交換子のどのような共役も

$$g(xyx^{-1}y^{-1})g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1})(gxg^{-1})^{-1}(gyg^{-1})^{-1}$$

となるから，再び交換子となる．$[G, G]$ の一般の元は交換子にならないかもしれないが，交換子たち，例えば，$c_1, c_2, \ldots, c_k$ の積は交換子である．G の元 g で共役を取ると，

$$g(c_1c_2\cdots c_k)g^{-1} = (gc_1g^{-1})(gc_2g^{-1})\cdots(gc_kg^{-1})^{-1}$$

となり，これは再び $[G, G]$ に属する．それゆえ，交換子群は G の正規部分群である．

x, y が G の元ならば，このとき，$xyx^{-1}y^{-1} \in [G, G]$ である．それゆえ，$[G, G]xyx^{-1}y^{-1} = [G, G]$ であり，これは，同様に，$[G, G]xy = [G, G]yx$ を与え，$G/[G, G]$ はアーベル群であることを示している．

最後に，もし G/H がアーベル群で，$x, y \in G$ ならば，このとき，$Hxy = Hyx$ である．よって，$Hxyx^{-1}y^{-1} = H$ となる．これは交換子 $xyx^{-1}y^{-1}$ は H に属さなければならないことを意味する．ゆえに，H は $[G, G]$ を含む．

□

交換子群は G の正規部分群の中で，対応する商群がアーベル群となる**最小**のものである．$G/[G,G]$ を作ることを G を**アーベル群化する** (abelianize) という．

例 (ix)．いつもの記号を用いると，$\langle r^2\rangle$ は D_n の正規部分群である．もし，n が奇数ならば，このとき，$\langle r^2\rangle = \langle r\rangle$ は D_n において指数 2 を持つ．一方で，n が偶数ならば，$\langle r^2\rangle$ は D_n において指数 4 を持つ．どちらの場合においても，商群 $D_n/\langle r^2\rangle$ はアーベル群でなければならない．それゆえ，D_n の交換子群は $\langle r^2\rangle$ に含まれる．しかし，

$$rsr^{-1}s^{-1} = rrss = r^2$$

は r^2 が交換子であることを示している．よって，$[D_n, D_n] = \langle r^2\rangle$ である．もし，n が奇数ならば，$D_n/[D_n, D_n] \cong \mathbb{Z}_2$ となり，n が偶数ならば，$D_n/[D_n, D_n] \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ となる．

例 (x)．4 元数群 Q の部分群 $\{\pm 1\}$ は正規部分群であり，$Q/\{\pm 1\}$ は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ に同型である．それゆえ，Q の交換子群は $\{\pm 1\}$ に含まれる．そして，それは，Q がアーベル群でないことから，$\{\pm 1\}$ に等しくなければならない．

演習問題

15.1. H と J がともに G の部分群であるとき，HJ が G の部分群となるのは $HJ = JH$ のときであり，また，このときに限ることを証明せよ．

15.2. D_4 と D_5 のすべての正規部分群を見つけよ．この問を一般化して，任意の n に対して D_n の正規部分群を見つけよ．

15.3. 4 元数群 Q のすべての部分群は Q の正規部分群であることを示せ．

15.4. O_n は $GL_n(\mathbb{R})$ の正規部分群であるか？

15.5. H を群 G の正規部分群とし，J を H の正規部分群とする．このとき，もちろん J は G の部分群である．J は G の正規部分群とは必ずしもならないことを例を挙げて示せ．

15.6. H, J は群の正規部分群で，これらが単位元だけを共通に持つならば，すべての $x \in H$, $y \in J$ に対して，$xy = yx$ となることを示せ．

15.7. K を $G \times H$ の正規部分群とし，$G \times \{e\}$ と $\{e\} \times H$ の共通部分が単位元のみであるとする．K はアーベル群であることを示せ．

15.8. A_4 の交換子群を見つけよ．もし n が5以上であれば，A_n の交換子群は A_n 全体となることを示せ．

15.9. $\varphi : G \to G'$ を同型写像とする．φ は G の交換子群を G' の交換子群へ写すことを証明せよ．

15.10. 定理15.2を次のように改良せよ：H を群 G の部分群とし，X を G の生成元で，その各元の逆元も含む集合とする．また，Y を H の生成元の集合とする．すべての $x \in X, y \in Y$ に対して $xyx^{-1}y^{-1} \in H$ となるならば，H は G の正規部分群となることを示せ．

15.11. H を無限群 G の有限指数を持つ部分群とする．G は H に含まれる有限指数の正規部分群を持つことを証明せよ．

15.12. 単純群 (simple group) とは，正規部分群が $\{e\}$ と群全体だけであるようなものをいう．A_4 の真正規部分群を見つけよ．次に，交代群 A_5 を考える．交換子

$$(12345)^{-1}(345)^{-1}(12345)(345),$$
$$(12)(34)(345)^{-1}(12)(34)(345)$$

を計算せよ．A_5 の自明でない正規部分群は3-サイクルを含まなければならないことを示せ．演習問題14.5の前半部分を用いて，この部分群は A_5 の全体でなければならないこと，それゆえ，A_5 は単純群であることを結論付けよ．(n が5より大きいときには，A_n が単純群であることを確かめることはそれほど難しいことではない.)

15.13. もし H が群 G の巡回的な正規部分群であるならば，H のどのような部分群もまた G の正規部分群となることを証明せよ．

15.14. 商群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ のすべての元は有限位数を持つ一方で，$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ の単位元だけが有限位数を持つことを示せ．

15.15. G が $\mathbb{Z}_2$ に同型な正規部分群を持ち，対応する商群が無限巡回群となるならば，G は $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ に同型であることを証明せよ．

15.16. G は，無限巡回群であるような正規部分群で，対応する商群が位数2の巡回群となるようなものを含むとする．G は $\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, D_∞ の1つに同型でなければならないことを示せ．

第16章　準同型写像

G, G' を群とする．写像 $\varphi: G \to G'$ が**準同型写像** (homomorphism) であるとは，それが G の積を G' の積に写すときをいう．言い換えると，すべての $x, y \in G$ に対して，

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

となるときをいう．次に φ の**核** (kernel)K は，G の元で φ によって G' の単位元に写されるものの集合と定義される．式で表すと，$K = \{x \in G | \varphi(x) = e\}$ となる．φ が全単射でもあるならば，このときは同型写像となる．この場合，φ の核は G の単位元のみからなる．同型写像の様々な性質については，7 章で確かめた．同型写像が全単射であるという事実を使っていない議論はここでも同じく有効である．それゆえ，準同型写像は G の単位元を G' の単位元に写し，逆元を逆元に写し，G の各部分群を G' の部分群に写す．特に，φ は群全体 G を G' の部分群に写す．この部分群は φ の**像** (image) と呼ばれる．

H が G の正規部分群ならば，$\varphi(x) = xH$ によって定義される写像 $\varphi: G \to G/H$ は準同型写像となる．なぜならば，

$$\varphi(xy) = xyH = (xH)(yH) = \varphi(x)\varphi(y)$$

がすべての $x, y \in G$ に対して成り立つからである．この準同型写像の像は G/H であり，核は H 全体である．

(16.1) 第一同型定理． 準同型写像 $\varphi: G \to G'$ の核 K は G の正規部分群であり，対応 $xK \to \varphi(x)$ は商群 G/K から φ の像への同型写像となる．

証明． $x, y \in K$ とすると，$\varphi(xy^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)^{-1} = e$ となるから，これは $xy^{-1} \in K$ を示している．$e \in K$ であるから，実際，K は空集合ではない．それゆえ，(5.1) により K は G の部分群である．もし $x \in K$ で $g \in G$ とす

ると，

$$\varphi(gxg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(x)\varphi(g)^{-1} = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = e$$

となる．よって，gxg^{-1} は K に属し，部分群 K は G の正規部分群である．

もし，2 つの剰余類 xK, yK が等しいならば，このとき，$y^{-1}x \in K$ となる．φ を施すと，$\varphi(y^{-1}x) = \varphi(y)^{-1}\varphi(x) = e$ となる．ゆえに，$\varphi(x) = \varphi(y)$ となる．これは $\psi(xK) = \varphi(x)$ により，写像 $\psi : G/K \to G'$ が定まることを意味する．上の計算を逆にたどることにより，$\varphi(x) = \varphi(y)$ ならば，$xK = yK$ となり，したがって，ψ は単射であることが示される．ψ は準同型写像である．なぜならば，

$$\psi(xKyK) = \psi(xyK) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \psi(xK)\psi(yK)$$

がどのような 2 つの剰余類 $xK, yK \in G/K$ に対しても成り立つからである．最後に，ψ の像は φ の像と同じである．ψ は G/K から φ の像への同型写像であることが証明された．□

(16.1) の 2 つの特別な場合は特に役に立つものである．

(16.2) 系．φ の像が G' 全体であるならば，G/K は G' に同型である．

(16.3) 系．φ の像が G' 全体であると仮定する．このとき，φ が同型写像であるための必要十分条件は，K が G の単位元のみからなることである．

例． 読者は以下の各写像が全射準同型写像であることをぜひ確かめてほしい．

(i) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n, x \mapsto x \pmod{n}$.
　$K = n\mathbb{Z}$（n の倍数すべての集合）であり，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}_n$は同型である．

(ii) $\mathbb{R} \to C, x \mapsto e^{2\pi ix}$.
　$K = \mathbb{Z}$ であり，$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と C は同型である．

(iii) $\mathbb{C} - \{0\} \to C, z \mapsto z/|z|$.
　$K = \mathbb{R}^{\mathrm{pos}}$であり，$\mathbb{C} - \{0\}/\mathbb{R}^{\mathrm{pos}}$は C に同型である．

(iv) $O_n \to \{\pm 1\}, A \mapsto \det A$.
　$K = SO_n$であり，O_n/SO_nは $\mathbb{Z}_2$に同型である．

(v) $U_n \to C, A \mapsto \det A$.
　$K = SU_n$であり，U_n/SU_nは C に同型である．

(vi) $C \to C, z \mapsto z^2$.
　$K = \{\pm 1\}$ であり，$C/\{\pm 1\}$ は C に同型である．

(vii) 群 S_4 は位数 2 の 3 つの元，すなわち，$(12)(34), (13)(24), (14)(23)$ を含む．これらの元と単位元で，S_4 の部分群をなし，これはクラインの群と同型である．これを V と表そう．置換 $\theta \in S_4$ による共役は位数 2 の **3** つの元を互いに置換しなければならない．なぜならば，共役な元はいつも同じ位数を持つからである．各 θ を（位数 2 のこれらの元の）対応する置換へ写すことにより，S_4 から S_3 への写像で，準同型かつ全射であるものを作ることができる．その核はちょうど V となり，(16.2) により S_4/V は S_3 に同型となることがわかる．

(viii) $bi + cj + dk$ の形の $\mathbb{H}$ の元は「純 4 元数」と呼ばれる．すべての純 4 元数のなす集合を対応 $bi + cj + dk \to (b, c, d)$ により $\mathbb{R}^3$ と同一視する．q がゼロでない 4 元数ならば，q による共役は純 4 元数をまた純 4 元数へ写し，$\mathbb{R}^3$ における**回転**を誘導する．この構成により，$\mathbb{H} - \{0\}$ から SO_3 への準同型を得る．その像は，SO_3 の全体であり，核は $\mathbb{R} - \{0\}$ で (16.2) により，$\mathbb{H} - \{0\}/\mathbb{R} - \{0\}$ は SO_3 に同型である．

(16.4) 第二同型定理． H, J は G の部分群で，J は G の正規部分群であるとする．このとき，HJ は G の部分群であり，$H \cap J$ は H の正規部分群であり，商群 HJ/J と $H/H \cap J$ は同型となる．

証明． g, g_* を HJ の元とし，$g = xy, g_* = x_*y_*$ と書くことにする．ここで，$x, x* \in H, y, y_* \in J$ である．このとき，

$$\begin{aligned} gg_*^{-1} &= xyy_*^{-1}x_*^{-1} \\ &= (xx_*^{-1})(x_*yy_*^{-1}x_*^{-1}) \in HJ \end{aligned}$$

であり，(5.1) により HJ は G の部分群である．どこで J の正規性が使われているのか？

$\varphi(x) = xeJ = xJ$ によって定められる写像 $\varphi : H \to HJ/J$ は準同型写像である．これは全射でもある．なぜならば，$g = xy \in HJ$ ならば，

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= xJ \\ &= xyJ \qquad (y \in J \text{ だから}) \\ &= gJ \end{aligned}$$

となるからである．H の元 x が φ の核に属するのはちょうど $xJ = J$ のときである．別の言い方をすれば，$x \in J$ のときである．それゆえ，φ の核は

$H \cap J$ であり，(16.1) より結果が従う．□

(16.5) 第三同型定理. H, J を G の正規部分群とし，H は J に含まれているとする．このとき，J/H は G/H の正規部分群であり，商群 $(G/H)/(J/H)$ は G/J と同型になる．

証明. $\varphi(xH) = xJ$ によって定められる写像 $\varphi : G/H \to G/J$ は準同型写像であり，全射である．剰余類 xH が φ の核に属するのはちょうど $xJ = J$ のときである．別の言い方をすれば，$x \in J$ のときである．それゆえ，φ の核は J/H であり，(16.1) より結果が従う．□

演習問題

16.1. 次のうちのどれが $\mathbb{C} - \{0\}$ から $\mathbb{C} - \{0\}$ への準同型写像を定めるか？

(a) $z \mapsto z^*$　(b) $z \mapsto z^2$

(c) $z \mapsto iz$　(d) $z \mapsto |z|$

16.2. 次の中で $GL_n(\mathbb{C})$ から $GL_n(\mathbb{C})$ への準同型写像を定めるものがあるか？

(a) $A \mapsto A^t$　(b) $A \mapsto (A^{-1})^t$

(c) $A \mapsto A^2$　(d) $A \mapsto A^*$

16.3. $G \times \{e\}$ は $G \times H$ の正規部分群であること，商群 $(G \times H)/(G \times \{e\})$ は H に同型であることをそれぞれ示せ．

16.4. A が G の正規部分群で，B が H の正規部分群ならば，$A \times B$ は $G \times H$ の正規部分群であること，商群 $(G \times H)/(A \times B)$ は $(G/A) \times (H/B)$ に同型であることをそれぞれ示せ．

16.5. D_∞ の中の平行移動は D_∞ の正規部分群をなし，対応する商群は $\mathbb{Z}_2$ に同型であることをそれぞれ確かめよ．

16.6. 数 $a \in \mathbb{R} - \{0\}, b \in \mathbb{R}$ が与えられたとき，$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数 $f(a, b)$ を $f(a, b)(x) = ax + b$ と定める．このような関数すべての集まりは関数の合成により群 G をなすことを示せ．H が $a = 1$ となるような G の部分集合とするとき，H は G の正規部分群であり，G/H は $\mathbb{R} - \{0\}$ に同型であることを証明せよ．

16.7. $GL_2(\mathbb{C})$ の各元

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

は拡張された複素平面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の，いわゆる，**メビウス変換** (Möbius trans-

formation)

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

を引き起こす．これらの変換は関数の合成により群，**メビウス群** (Möbius group)，をなすこと，この群は $GL_2(\mathbb{C})$ をその中心で割った商群に同型であることをそれぞれ示せ．

16.8. 写像 $\varphi : G \to G'$ が準同型写像であるための必要十分条件は，$\{(g, \varphi(g)) | g \in G\}$ が $G \times G'$ の部分群であることであることを示せ．

16.9. 商群 $S^3/\{\pm 1\}$ は SO_3 と同型であることを証明せよ．S^3 と SO_3 は互いに同型でないことを確かめよ．

16.10. 演習問題 12.12 のアイディアを用いて，S_n は組み紐群 B_n のある商群に同型であることを議論せよ．

16.11. 写像 $\varphi : G \to G'$ が全射準同型写像であり，K をその核とする．H' が G' の部分群であるとき，

$$\varphi^{-1}(H') = \{g \in G | \varphi(g) \in H'\}$$

と定める．$\varphi^{-1}(H')$ は K を含む G の部分群であり，対応 $H' \leftrightarrow \varphi^{-1}(H')$ は G' のすべての部分群の集まりと K を含む G のすべての部分群の集まりの間の**全単射**であることを確かめよ．

16.12. H が G の極大正規部分群であるための必要十分条件は，G/H が単純群となることであることを示せ．(極大とは，G の正規部分群で H を含むものは G と H だけであることを意味する．)

第17章　作用，軌道，固定部分群

よい定義は明確で，無駄のないものであるべきであり，単純な直観的発想を捕らえているべきである．加えていうならば，扱いやすいものがよりよい．これらの特質をすべて兼ね備えた定義からこの章を始めよう．

群 G の集合 X 上のある**作用** (action) とは，G から S_X へのある準同型写像のことをいう．

詳細にこれを見ていこう．$\varphi : G \to S_X$ を準同型写像とする．群 G の各元 g に対して，写像 φ は X の点の置換 $\varphi(g)$ を与える．$g, h \in G$ ならば，積 gh に付随した置換 $\varphi(gh)$ は，φ が準同型写像であることから，合成写像 $\varphi(g)\varphi(h)$ に等しい．G の代数的構造と**整合性**を持つように，G の元は X の点を置換していると想像する．

多くの場合，より煩雑な記号 $\varphi(g)(x)$ の代わりに，g に対応する置換による点 $x \in X$ の像を $g(x)$ と書いて，記号を簡略化しよう．群の元 $g \in G$ は点 $x \in X$ を点 $g(x) \in X$ へ**送る**としばしばいうことにしよう．φ が準同型写像であるという条件は，任意の 2 つの元 $g, h \in G$ と任意の点 $x \in X$ に対して

$$gh(x) = g(h(x))$$

が成り立つこととなる．

例 (i)．無限巡回群 $\mathbb{Z}$ は実数軸上に平行移動として作用する．整数 n は実数 x を $n + x$ へ送る．m と n が実数ならば，このとき，

$$(m + n) + x = m + (n + x)$$

となるから，実際に作用を得る．

例 (ii)．作用の定義の最初の言葉ですら，暗示的である．「ある」作用といっているのは，与えられた群が同じ集合上に異なる方法で作用するかもしれ

ないからである．ここで，$\mathbb{Z}$ の $\mathbb{R}$ 上の 2 番目の作用を見てみよう．$n \in \mathbb{Z}$ は $x \in \mathbb{R}$ を $(-1)^n x$ へ送ることはいいだろう．言い換えれば，すべての偶数に付随した置換は $\mathbb{R}$ の恒等置換であり，すべての奇数に付随した置換は $x \to -x$ と置換する．任意の 2 つの整数 m, n と任意の実数 x に対して，$(-1)^{m+n}x = (-1)^m(-1)^n x$ となるので，これは作用である．

例の蓄えを増やしていく前に，もう少し専門用語が必要である．X 上の G の作用と点 $x \in X$ が与えられたとき，g が G の中で変わるのに従って得られる像 $g(x)$ のすべての集合は，x の**軌道** (orbit) と呼ばれ，$G(x)$ と書かれる．$G(x)$ は X の部分集合であることに注意せよ．最初の例では，実数 x の軌道は，すべての平行移動 $n + x$ からなる．ここで，$n \in \mathbb{Z}$ である．2 番目の例では，x の軌道は，x がゼロでなければ，2 つの点 $x, -x$ であり，0 の軌道は単に $\{0\}$ である．

$\mathcal{R}$ は $X \times X$ の部分集合で，ある $g \in G$ に対して $g(x) = y$ となるような順序付けられた組 (x, y) からなるものとする．このとき，$\mathcal{R}$ は X 上の同値関係である．(G の単位元に付随した置換は恒等置換であり，結果として，各 x は，$e(x) = x$ となるから，自分自身と関係している．x は y と関係しているならば，例えば，$g(x) = y$ であれば，このとき，

$$g^{-1}(y) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}g(x) = e(x) = x$$

となるので，y は x に関係している．x は y と関係していて，y は z と関係しているならば，例えば，$g(x) = y$, $g'(y) = z$ であれば，このとき，

$$g'g(x) = g'(g(x)) = g'(y) = z$$

となり，これは x は z と関係していることを示す.）$\mathcal{R}$ の同値類は単に群の作用の軌道である．それゆえ，異なる軌道は X を分割する．

x が X のある点であるとき，x を固定する G の元の集まりは G の部分群をなす．これを x の**固定部分群** (stabilizer)G_x と呼ぶ．例 (i) では，各実数の固定部分群は $\mathbb{Z}$ の自明な部分群 $\{0\}$ である．例 (ii) では，x の固定部分群は x がゼロでなければ，$\mathbb{Z}$ の部分群 $2\mathbb{Z}$ であり，$x = 0$ ならば，$\mathbb{Z}$ の全体である．

例 (iii)．X を立方体の辺のなす集合とする．立方体の向かい合う 2 つの面それぞれの中心を通る軸について立方体を回転させることにより，X 上に $\mathbb{Z}_4$ の作用を作ることができる．かしこまった言い方をすると，r が図 17.1 に示さ

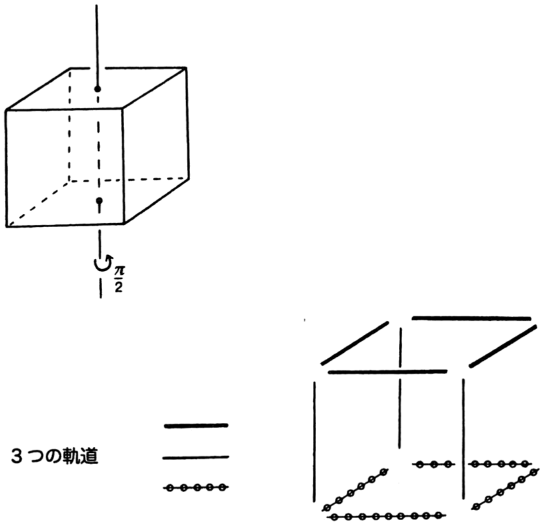


図 17.1

れる回転によって誘導される X の置換であるとすると，このとき $\varphi(m) = r^m$ により，$\varphi : \mathbb{Z}_4 \to S_X$ を定める．3 つの異なる軌道がある．上面の 4 つの辺，底面の 4 つの辺，垂直方向の 4 つの辺である．すべての辺の固定部分群は $\mathbb{Z}_4$ の自明な部分群 $\{0\}$ である．

例 (iv)．直交変換は長さを保つ．よって，X が $\mathbb{R}^3$ の中の単位球面ならば，X 上に SO_3 の自然な作用がある．行列 $A \in SO_3$ は単位ベクトル $\mathbf{x}$ を単位ベクトル $\mathbf{x}A^t$ へ送る．どのようなベクトルの軌道も**球面全体**となる．(2 つの単位ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ は 1 つの平面を定める．この平面に垂直な $\mathbf{0}$ を通る軸について，$\mathbb{R}^3$ の適当な回転は $\mathbf{x}$ を $\mathbf{y}$ の位置へ送るであろう．この回転の行列は $\mathbf{x}$ を $\mathbf{y}$ へ送る SO_3 の元である.）$\mathbf{e}_1$ を $\mathbb{R}^3$ の標準基底の最初の元とする．もし，$A \in SO_3$ が $\mathbf{e}_1$ を固定するならば，このとき，A の形は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \quad 0 \\ 0 & \\ 0 & \raisebox{1em}{B} \end{pmatrix}$$

となる．ここで，$B \in SO_2$ である．したがって，$\mathbf{e}_1$ の固定部分群は SO_3 の

中の SO_2 のこの「標準的なコピー」である．同じ軌道にある点は常に共役な固定部分群を持つ（(17.1) を見よ）．それゆえ，どのような単位ベクトルの固定部分群も SO_2 に同型である．これは推移的な作用の例である．作用が**推移的**[1](transitive) であるとは，軌道が 1 つしかない場合をいう．

例 (v)．任意の群 G を取り，X を集合としての G とする．G を X 上に共役で作用させる．ここで，$g \in G$ は x を gxg^{-1} へ送る．これはすべての $g, h \in G$ とすべての $x \in X$ に対して

$$(gh)x(gh)^{-1} = g(hxh^{-1})g^{-1}$$

となることから，作用である．軌道は G の**共役類**である．点 x の固定部分群は

$$\{g \in G | gxg^{-1} = x\} = \{g \in G | gx = xg\}$$

である．言い換えれば，G の部分群で，x と**交換する**元すべてからなるものである．

集合 X 上に群 G の作用が与えられたとしよう．

(17.1) 定理．同じ軌道にある点は共役な固定部分群を持つ．

証明．x と y が同じ軌道に属すると仮定する．例えば，$g(x) = y$ としよう．

$$gG_xg^{-1} = G_y$$

を示そう．もし $h \in G_x$ であるとすると，

$$\begin{aligned} ghg^{-1}(y) &= ghg^{-1}(g(x)) \\ &= gh(x) \\ &= g(x) \\ &= y \end{aligned}$$

となる．それゆえ，gG_xg^{-1} は G_y に含まれる．x と y の役割を交換すれば，同じ議論により，$g^{-1}G_yg \subseteq G_x$ となる．つまり，$G_y \subseteq gG_xg^{-1}$ となる．これで証明が完成した． □

(17.2) 軌道–固定部分群定理．各 $x \in X$ に対して，対応 $g(x) \to gG_x$ は，$G(x)$ と G における G_x の左剰余類の集合との間の全単射である．

---

[1] ［訳注］可移的ともいわれる．

証明．対応は明らかに全射である．これは単射でもある．なぜならば，もし $gG_x = g'G_x$ ならば，このとき，ある G_x の元 h に対して $g = g'h$ となり，それゆえ，$g(x) = g'h(x) = g'(h(x)) = g'(x)$ となるからである．□

別の言い方をすれば，軌道–固定部分群定理は，x の軌道の濃度と G における x の固定部分群の指数が等しいことをいっているのである．

(17.3) 系．G が有限群ならば，各軌道の大きさは G の位数の約数である．

証明．軌道–固定部分群定理により，$G(x)$ の大きさは $|G|/|G_x|$ である．それゆえ，

$$|G(x)| \cdot |G_x| = |G|$$

となる．□

例（v，続き）．G が有限群ならば，(17.3) により各共役類における元の数は，G の位数の約数となるといえる．

例 (vi)．コーシーの定理の証明を次のように書き換えることができる．G を有限群とし，p を G の位数の素因数とする．前のように，X は G の元の順序付けられた列 $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ で，$x_1x_2\cdots x_p = e$ となるものすべてのなす集合である．X の大きさは p で割り切れることを思い出そう．X 上には $\mathbb{Z}_p$ の自然な作用がある．元 $m \in \mathbb{Z}_p$ は列 $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ を $(x_{m+1}, \ldots, x_p, x_1, \ldots, x_m)$ へ送る．(17.3) により各軌道は1つ，あるいは p 個の列のいずれかを含む．もし，$(e, e, \ldots, e)$ 以外のすべての軌道が p 個の列を含むならば，このとき，X の大きさは p では割り切れない．それゆえ，$(e, e, \ldots, e)$ 以外の列 $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ で，$\mathbb{Z}_p$ のすべての元によって**固定される**ものがある．言い換えれば，$x_1 = x_2 = \cdots = x_p$ となり必要な結果を得る．

(17.4) 定理．p が素数で，G の位数が p のべき乗ならば，G は非自明な中心を持つ．

証明．G をその共役類に分割することを考える．(17.3) より各共役類の大きさは 1 か p のべき乗であるから，定義により，中心は唯 1 つの元を含む共役類からなる．もし中心が自明であったならば，G の位数は p を法として 1 に合同となるだろう．しかし，これは G の位数が p のべき乗であるという仮定に矛盾する．□

(17.5) 定理. p が素数ならば，位数 p^2 の群は巡回群であるか，$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ に同型である．

証明. G の位数が p^2 であると仮定する．G が位数 p^2 の元を含むならば，このとき G は巡回群である．そうでなければ，e を除くすべての元は位数 p を持つ．G の中心は (17.4) により非自明であるから，(e とは異なる) x を $Z(G)$ から選び，y を $\langle x \rangle$ の外から選ぶ．p^2 個の元 $x^i y^j$, $1 \leq i, j \leq p$ は互いに異なる．なぜならば，$\langle x \rangle$ と $\langle y \rangle$ は単位元だけを共通に持つからである．それゆえ，$\langle x \rangle \langle y \rangle = G$ となる．$x \in Z(G)$ なので，$\langle x \rangle$ のすべての元は $\langle y \rangle$ のすべての元と交換する．(10.2) により G は $\langle x \rangle \times \langle y \rangle$ と同型であり，よって，$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ に同型である． □

演習問題

17.1. G を (123)(45) と (78) で生成される S_8 の部分群とする．このとき，G は集合 $X = \{1, 2, \ldots, 8\}$ の置換の群として作用する．X のすべての整数に対して，軌道と固定部分群を計算せよ．

17.2. 無限 2 面体群 D_∞ は自然に実数軸上に作用する（5 章を見よ）．点 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ の各々の軌道と固定部分群を求めよ．

17.3. 8 章にあるように，立方体の回転対称性のなす群と S_4 を同一視し，立方体の頂点の集合上の A_4 の作用を考える．各頂点の軌道と固定部分群を見つけよ．

17.4. ある集合上の G の作用が与えられたとき，ある軌道のすべての点が同じ固定部分群を持つための必要十分条件は，この固定部分群が G の正規部分群となることであることを示せ．

17.5. G が X 上に作用し，H が Y 上に作用しているとき，$G \times H$ は $X \times Y$ 上に

$$(g, h)(x, y) = (g(x), h(y))$$

により作用することを証明せよ．(x, y) の軌道は $G(x) \times H(y)$ であること，および，その固定部分群は $G_x \times H_y$ であることを確かめよ．この作用を $G \times H$ の $X \times Y$ 上の**直積作用** (product action) と呼ぶ．

17.6. ここに $\mathbb{R}^4$ 上の 4 つの群作用がある．

(a) $GL_4(\mathbb{R})$ の通常の作用．

(b) $\mathbb{R}^4$ を $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ と同一視して，$SO_2 \times SO_2$ なる直積作用を取る．

(c) $\mathbb{R}^4$ を $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ と考えて，SU_2 を通常の方法で作用させる．

(d) $\mathbb{R}^4$ を $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ と同一視して，$SO_3 \times \mathbb{Z}$ なる直積作用を取る．ここで，$\mathbb{Z}$ は $\mathbb{R}$ に足し算として作用する．

各場合について，軌道と固定部分群の構造に関して議論せよ．

17.7. G が X 上と Y 上に作用しているとき，式 $g((x,y)) = (g(x), g(y))$ は $X \times Y$ 上の G の作用を定めることを示せ．(x,y) の固定部分群は G_x と G_y の共通部分となることを確かめよ．G が X 上と Y 上にともに推移的に作用していても，上で定めた作用は推移的である必要はないことを示す例を挙げよ．この作用は G の $X \times Y$ 上の**対角作用** (diagonal action) と呼ばれる．

17.8. $X = \{1,2,3,4\}$ とし，G を (1234) と (24) で生成される S_4 の部分群とする．G の $X \times X$ 上の対角作用に関する軌道と固定部分群を求めよ．

17.9. 群 $C \times C$ は**トーラス** (torus) と呼ばれる．$C \times C$ の図を描いて，このような名前が付く理由を示せ．トーラス上の $\mathbb{R}$ の次の作用の軌道を図示せよ．

(a) 実数 t は (e^{ix}, e^{iy}) を $(e^{i(x+t)}, e^{iy})$ へ送る．

(b) 今度は，t は (e^{ix}, e^{iy}) を $(e^{i(x+t)}, e^{i(y+t)})$ へ送る．

(c) 最後に，t は (e^{ix}, e^{iy}) を $(e^{i(x+t)}, e^{i(y+t\sqrt{2})})$ へ送るとしよう．

17.10. x を群 G の元とする．G の元で x と交換するものは G の部分群をなすことを示せ．この群は x の**中心化群** (centralizer) と呼ばれ，$C(x)$ と書かれる．x の共役類の大きさと G における $C(x)$ の指数は等しいことを証明せよ．ある共役類がちょうど 2 つの元だけを含むならば，G は単純群にはなり得ないことを示せ．

17.11. n が奇数ならば，A_n においてちょうど 2 つの n-サイクルの共役類があり，その各々は $(n-1)!/2$ 個の元を含むことを示せ．n が偶数であるとき，A_n における $(n-1)$-サイクルは 2 つの共役類を作り，その各々は $(n-2)!n/2$ 個の元を含むことを証明せよ．

17.12. p を素数とする．行列

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_p$$

は位数 p^3 の非可換群をなすことを示せ．

17.13. G は有限群で，X 上推移的に作用しているとし，H は G の正規部分群であるとするならば，X 上に誘導された H の作用の軌道はすべて同じ大きさを持つことを示せ．

17.14. H を群 G の有限部分群とする．式

$$(h, h')(x) = hxh'^{-1}$$

は G 上に $H \times H$ の作用を定めることを確かめよ．H が G の正規部分群であることの必要十分条件は，この作用のすべての軌道がちょうど $|H|$ 個の点を含むことであることを証明せよ．

第18章　軌道を数える

2人の子供，ジェロームとエミリー，のそれぞれに立方体と容器一杯分の赤色の絵の具と，容器一杯分の緑色の絵の具を与えた．エミリーは彼女の立方体の各面を赤か緑のどちらかの色を塗ることに決めた．ジェロームは図18.1にあるように各面を赤か緑の線で2つに分けるようにした．この際，どの2つの線も交わることはないようにした．2人のうちどちらの方が最も多くの異なる種類の絵の具で彩られた立方体を作ることができるだろうか？

結局は，ジェロームが12対10で勝った．子供たちは本能的に立方体の回転が決定的な役割を果たすことに気が付いた．装飾の観点から，立方体の上面を赤で塗り，その他のすべての面を緑で塗ることは，底面を赤で塗り，残りのすべてを緑で塗ることと同じことである．立方体を単に上下ひっくり返すだけで一方から他方が得ることができる．もし，一方を回転してもう一方を得ることができるならば，色塗られた2つの立方体は同じであることに異論はないだろう．

試行錯誤はこの種の問題を解く方法ではない．残念ながら，正12面体の

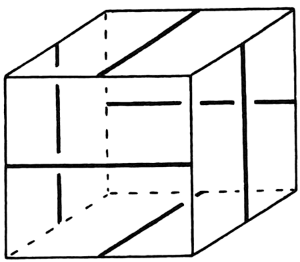


図18.1

各面を赤，白，青にすべて異なる方法で塗り分ける場合の数は，実験により，9,099 通りもあるのだ！ 代わって，エミリーの問題を次のように分析しよう．各面を赤または緑で塗ることにより得られる対象を**彩色立方体** (colored cube) と呼ぼう．立方体は 6 つの面を持つので，全部で 2^6 個の彩色立方体がある．これらは集合をなし，X と書くことにしよう．立方体の回転対称性の群は X 上に作用し，2 つの彩色立方体が同じ軌道の中になければ，これらは真に異なる．私たちの問題を解くには，作用による異なる軌道の数が必要となる．

集合 X 上に有限群 G の作用があるとする．X の部分集合で G の元 g で**固定される**点からなるものを X^g と書く．

(18.1) 数え上げ定理． 異なる軌道の数は

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$$

である．つまり，G のある元により固定される点の数の平均値である．

証明． $G \times X$ の中から，$g(x) = x$ となる順序付けられた組 (g, x) の集まりの数を数えよう．そのような組の数は，

$$\sum_{g\in G}|X^g| \tag{$*$}$$

である．これはまた

$$\sum_{x\in X}|G_x| \tag{$**$}$$

に等しい．$X_1, X_2, \ldots, X_k$ を互いに異なる軌道とし，$(**)$ を

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{x\in X_i}|G_x|$$

と書き直す．同じ軌道の中にある点は共役な固定部分群をもつ．ゆえに，もし $\bar{x}$ が X_i のある選ばれた点であるならば，

$$\begin{aligned}\sum_{x\in X_i}|G_x| &= |X_i|\cdot|G_{\bar{x}}|\\ &= |G(\bar{x})|\cdot|G_{\bar{x}}|\end{aligned}$$

となる．これは軌道–固定部分群定理により，単に $|G|$ である．それゆえ，式表示 $(**)$ は $k|G|$ に等しい．$(*)$ と $(**)$ を合わせて，結果を得る．　□

(18.2) 定理. 群の元で共役なものは同じ個数の点を固定する.

証明. g と h が G の中で共役であるとする. 例えば, $ugu^{-1} = h$ とする. もし g が x を固定するならば, このとき, h は $u(x)$ を固定する. なぜならば,

$$h(u(x)) = ugu^{-1}(u(x)) = ug(x) = u(x)$$

となるからである. それゆえ, u は集合 X^g を X^h の中に送る. g と h の役割を入れ替えて同じ議論をすれば, u^{-1} は X^h を X^g へ送り返すことが示される. これは u が X^g と X^h の間の全単射を与えることを意味する. よって, 固定点のなす 2 つの集合は同じ大きさでなければならない. □

さて, 私たちのもとの問題である.

エミリーの問題. 立方体の回転対称性の群の各共役類から元を 1 つ取り, どれだけ多くの彩色立方体がその元によって固定されるかを求めなければならない. 共役類の代表として, 単位元とともに図 18.2 に示される回転 r, r^2, s, t を選ぶ. r によって固定される彩色立方体は 4 つの垂直方向の面が同じ色で塗られてなければならない. なぜならば, r はこれらの各面をその右隣の面の位置に回転させるからである. 上面に対しては 2 色の選択があり, 底面に関しても 2 色の選択があり, 残りすべてに関しても 2 色の選択がある. それゆえ, $|X^r| = 2^3$ である. 立方体の面に対する s の効果は, 次のようにまとめることができる.

上面 → 右側面 → 背面 → 上面,
底面 → 左側面 → 正面 → 底面

これにより, $|X^s| = 2^2$ となる. r^2 と t の場合については, 読者に委ねる. r^2 は 2^4 個の彩色立方体を固定し, t は 2^3 個の彩色立方体を固定する. もちろん, 単位元は 2^6 個すべてを固定する. r, r^2, s, t の各共役類は, 6 個, 3 個, 8 個, 6 個の元をそれぞれ含む. それゆえ, 立方体の各面を赤または緑に塗った場合に得られる真に異なる彩色立方体の数は,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{24}\{(6 \times 2^3) + (3 \times 2^4) + (8 \times 2^2) + (6 \times 2^3) + 2^6\}\\ &\quad = \frac{1}{3}\{6 + 6 + 4 + 6 + 8\}\\ &\quad = 10\end{aligned}$$

となる. □

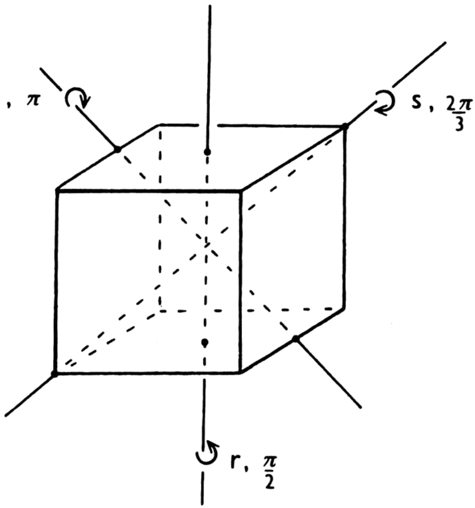


図 18.2

ジェロームの問題． 図 18.1 にあるように立方体の面上に引かれた線がある．これらの各線を赤か緑に塗ろうと思う．これは前の問題とほとんど同じであるが，全く同じであるわけではない．与えられた線の模様は立方体のすべての回転対称性によって自分自身に送られるのではなく，その半分だけの対称性，つまり，4 つの主対角線の偶置換を誘導するものだけが使われる．関係する群は S_4 よりむしろ A_4 である．共役類は r^2, s, s^2, e であり，異なる彩色立方体の数は，これで

$$\begin{aligned}&\frac{1}{12}\{(3\times 2^4)+(4\times 2^2)+(4\times 2^2)+2^6\}\\&=\frac{1}{3}\{12+4+4+16\}\\&=12\end{aligned}$$

となる． □

この種の 3 番目の問題（L.M. Woodward に示唆された）を扱って終わりとしよう．5×1 の紙でできた長方形の帯の両面に 5 個の単位正方形を描く．帯の両端を半捻りしてつなげると，**メビウスの帯** M ができる．もし 3 色を

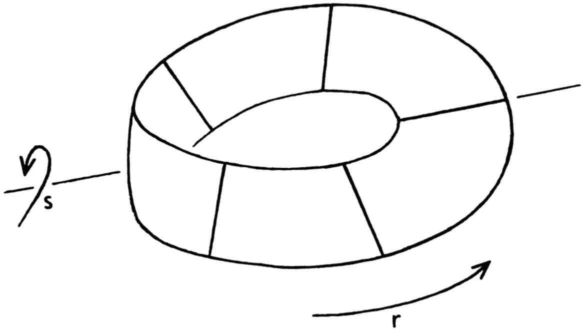


図 18.3

使って正方形を塗ったとしたら，どれだけ多くの帯を得ることができるだろうか？ 10 個の正方形と 3 色あるから，合計で 3^{10} の色塗られた帯が得られる.「異なる」というのは今の場合，メビウスの帯の「自然な」対称性を除いて異なるという意味である．M の模型を作って，そこに自分の指を入れて回して，正方形たちを 1 つの位置に沿って動かしてみよ．この対称性を r と呼ぼう．10 回動かすと，最初の位置に戻ってくる．ゆえに，r^{10} は恒等的である.（r は $\mathbb{R}^3$ の回転により誘導されるものではないことに注意しよう．これはメビウスの帯それ自身における動きである．この種の対称性は，帯が 2 つの滑車をつなぐベルトドライブとして使われる場合によく現れる.） もう 1 つ自然な対称性 s がある．これは単に M を図 18.3 にあるように引っくり返すものである．r と s は群を生成し，これは **2 面体群** D_{10} と同型となり，明らかな方法で，色塗られた帯の集合に作用する．D_{10} の共役類は

$$
\begin{array}{ccc}
\{e\}, & \{r, r^9\}, & \{r^2, r^8\}, \\
\{r^3, r^7\}, & \{r^4, r^6\}, & \{r^5\}, \\
\end{array}
$$
$$
\{s, r^2s, r^4s, r^6s, r^8s\},
$$
$$
\{rs, r^3s, r^5s, r^7s, r^9s\}
$$

となる．これらの各々から最初の元を取り，それがいくつの色塗られた帯を固定するかを求めると，e については 3^{10} 個，r については 3 個，r^2 については 3^2 個，r^3 については 3 個，r^4 については 3^2 個，r^5 については 3^5 個，s については 3^6 個，rs については 3^5 個となる.（例えば，s は 2 つの正方形を不変にする．これらはその軸によって中心を突き刺されているものである.

そして，s は残りの組になっている 8 個を入れ替える．よって，これにより 3^6 個の色塗られた帯が固定される.）数え上げ定理により，互いに異なる色で塗られたメビウスの帯の数は，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{20}\{3^{10}+(2\times 3)+(2\times 3^2)+(2\times 3)+(2\times 3^2)+(1\times 3^5)\\&\quad+(5\times 3^6)+(5\times 3^5)\}\\&\quad=3210\end{aligned}$$

となる．

読者は対称性 r と s の具体的な式がほしいと思うかもしれない．最も手際のいい方法は，次のようになる．M を $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ の部分集合

$$\{(e^{2i\theta},\lambda e^{i\theta})|-\pi<\theta\leq\pi, 0\leq\lambda\leq 1\}$$

と考える．すると，r は $(e^{2i\theta},\lambda e^{i\theta})$ を $(e^{2i(\theta+\pi/5)},\lambda e^{i(\theta+\pi/5)})$ へ送り，s は $(e^{2i\theta},\lambda e^{i\theta})$ を $(e^{-2i\theta},\lambda e^{-i\theta})$ へ送る．

数え上げ定理の化学への応用は参考文献 [5] の 20 章に見つけられる．

演習問題

18.1. 立方体の各辺を黒か白で塗る．何個の異なる装飾された立方体ができるだろうか？

18.2. 正 12 面体の面を赤，白，青で色塗る本質的に異なる方法は，本当に 9,099 通りあることを示せ．

18.3. 円形のバースデイケーキを等しい 8 つのくさび形に切り分ける．切り分けられた各々のケーキの中心にろうそくを 1 本立てるとして，赤と緑のろうそくを立てるときの異なる方法は何通りあるか？

18.4. 図 18.1 にある線の色塗りの代わりに，線によって分割された各面の半分に色を塗ることにする．2 色あるとしたとき，異なる色の塗り方は何通りあるか？

18.5. あるブレスレットは円形状のワイヤーの上に 5 つのビーズを載せたものからできている．赤，青，黄のビーズを自由に使えるとして，何通りの異なるブレスレットを作ることができるだろうか？

18.6. 正 4 面体 T の各頂点，各辺の中点，各面の重心を 3 色を用いて，色を付けることにする．T の回転対称性を考慮に入れると，400,707 通りの塗り分け方があることを証明せよ．

18.7. 正 6 角形の頂点と辺に対して，辺に赤，青，黄を用いて，頂点に黒，白を用

いて，辺と頂点に色を付ける異なる方法は何通りあるか？

18.8. $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ の部分集合としてのメビウスの帯の記述を見て，対称性 r と s を表す U_2 の中の行列を見つけよ．

第19章　有限回転群

特殊直交群 SO_3 は $\mathbb{R}^3$ における原点を固定する**回転**のなす群と同一視される（9 章）．$\mathbb{R}^3$ の中のある対象が，その重心が原点にあるよう配置されているとき，その回転対称性の群は，SO_3 の部分群「である」．私たちは空間における回転対称性の部分群のいくつかの候補についてすでに見慣れている．n 辺を底面に持つ正 n 角錐からは，位数 n の巡回群を得るが，一方，n 辺を持つ正 n 角形の板の回転対称性は 2 面体群を表し，D_n を与える．(2 辺を持つ正則な図形とは演習問題 9.12 で述べられているように，レンズ型を意味する.）加えて，正多面体の対称性の群も知っている．これから見るように，対象が有限個だけの対称性を持つと仮定した場合には，これらが**唯一の候補**である．別の言い方をすれば，SO_3 の**有限**部分群は，巡回群，2 面体群，正多面体のうちの 1 つの回転対称性のなす群に同型な群，のいずれかになるのである．少し志の低い結果であるが，まずは O_2 の有限部分群を扱うことから始めよう．

(19.1) 定理. O_2 の有限部分群は，巡回群か，2 面体群のいずれかである．

証明. G を O_2 の有限かつ非自明な部分群とする．まず最初に，G が SO_2 に含まれるとしよう．つまり，G の各元は平面の**回転**を表す．原点を中心に反時計回りに θ の回転を表す行列を A_θ と書く．ここで，$0 \leq \theta < 2\pi$ である．$A_\varphi \in G$ を，φ が正で，できる限り小さい値であるように選ぶ．$A_\theta \in G$ が与えられたとき，θ を φ で割って，$\theta = k\varphi + \psi$ を得る．ここで，$k \in \mathbb{Z}$ で，$0 \leq \psi < \varphi$ である．このとき，

$$A_\theta = A_{k\varphi+\psi} = (A_\varphi)^k A_\psi \quad と \quad A_\psi = (A_\varphi)^{-k} A_\theta$$

が成り立つ．A_θ と A_φ はともに G に属するので，A_ψ も G に属することが

わかる．これより，$\psi = 0$ が成り立つ．なぜならば，もしそうでないとすると，φ の選び方に矛盾してしまうからである．それゆえ，G は A_φ によって生成され，**巡回群**となる．

もし G 全体が必ずしも SO_2 に含まれていないとき，$H = G \cap SO_2$ とおく．すると，H は G において指数 2 を持つ部分群となる．証明の前半から，H は SO_2 に含まれていることから，巡回群である．H の生成元 A を選んで，$G - H$ から元 B を選ぶ．B は**反転**を表すので，$B^2 = I$ である．もし，$A = I$ ならば，G は I と B から構成され，位数 2 の**巡回群**となる．そうでなければ，A の位数は 2 以上の整数 n である．G の元は今

$$I, A, \ldots, A^{n-1}, B, AB, \ldots, A^{n-1}B$$

となり，これらは $A^n = I, B^2 = I, BA = A^{-1}B$ を満たしている．この場合，対応 $A \to r, B \to s$ により，G と **2 面体群** D_n の間の同型写像が定まる．□

(19.2) 定理． SO_3 の有限部分群は，巡回群，2 面体群，正多面体の 1 つの回転対称性のなす群，のいずれかに同型である．

証明． G を SO_3 の有限部分群とする．このとき，単位元以外の G の各元は原点を通る軸に関する $\mathbb{R}^3$ の回転を表す．対応する行列よりもむしろ，幾何学的に，議論を進めて回転を扱っていくことにしよう．回転 $g \in G$ の軸が単位球面と交わる 2 つの点は g の**極** (pole) と呼ばれる（図 19.1）．もし軸が z 軸であったならば，極は，単位球面の通常の北極と南極になる．これらの極だけが，与えられた回転により固定される単位球面上の点となる．$G - \{e\}$ のすべての元に対するすべての極のなす集合を X で表す．$x \in X, g \in G$ としよう．x は元 $h \in G$ の極であるとしよう．このとき，$(ghg^{-1})(g(x)) = g(h(x)) = g(x)$ となり，これは $g(x)$ が ghg^{-1} の極であることを示している．ゆえに，$g(x) \in X$ である．**それゆえ，X 上には G の作用がある．** 証明のアイディアは，数え上げ定理をこの作用に適用して，X は特別に良い点の配置でなければならないことを示すことである．

N を互いに異なる軌道の数とし，各軌道から 1 つ極を選び，これらの極を $x_1, x_2, \ldots, x_N$ と名付ける．$G - \{e\}$ のどの元もちょうど 2 つの極を固定する一方，単位元はそれらすべてを固定するから，数え上げ定理により，

$$N = \frac{1}{|G|}\{2(|G| - 1) + |X|\}$$

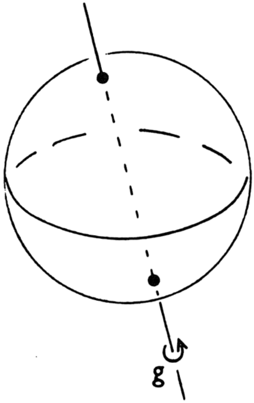


図 19.1

$$= \frac{1}{|G|}\left\{2(|G|-1) + \sum_{i=1}^{N} |G(x_i)|\right\}$$

となる．これを変形して，

$$\begin{aligned} 2\left(1 - \frac{1}{|G|}\right) &= N - \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{N} |G(x_i)| \\ &= N - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{|G_{x_i}|} \qquad (*) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\left(1 - \frac{1}{|G_{x_i}|}\right) \end{aligned}$$

となる．G が自明でない群であると仮定すれば，上の式の左辺は 1 以上で 2 より小さい．しかし，各固定部分群 G_x は少なくとも位数 2 を持つので，結果，$1 \leq i \leq N$ に対して，

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{|G_{x_i}|} < 1$$

が成り立つことになる．**それゆえ，N は 2 か 3 のいずれかになる．**

もし，$N = 2$ ならば，このとき，$(*)$ により，$2 = |G(x_1)| + |G(x_2)|$ となり，2 つの極だけが存在し得る．これらの極は軸 L を決定し，$G - \{e\}$ のすべての元はこの軸に関する回転でなければならない．原点を通り，L に垂直

である平面は G により自分自身に回転される．それゆえ，G は SO_2 の部分群に同型であり，(19.1) により**巡回群**でなければならない．

$N=3$ のとき，状況はより複雑である．x_1, x_2, x_3 の代わりに，x, y, z と書くことにすれば，

$$2\left(1-\frac{1}{|G|}\right)=3-\left(\frac{1}{|G_x|}+\frac{1}{|G_y|}+\frac{1}{|G_z|}\right)$$

となり，それゆえ，

$$1+\frac{2}{|G|}=\frac{1}{|G_x|}+\frac{1}{|G_y|}+\frac{1}{|G_z|}$$

となる．右辺の 3 つの項の和は 1 より**大きい**．それゆえ，4 つだけ可能性がある：

(a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n}$，ここで，$n \geq 2$ である．
(b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$.
(c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.
(d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$.

ここからは，これらの場合の各々について考えていくことにしよう．

(a) の場合．もし $|G_x|=|G_y|=|G_z|=2$ ならば，このとき G は単位元以外のすべての元が位数 2 を持つ位数 4 の群である．それゆえ，G は**クラインの群**に同型となり，ここでは，4 個の元からなる 2 面体群と考えることにする．g が G_z を生成するとしよう．g が距離を保つことを思い出そう．極 x と $g(x)$ は z から等距離にある．y と $g(y)$ に対しても同様である．よって，$-z$ は $G(z)$ の残りの点でなければならない．したがって，同様に，$g(x)=-x, g(y)=-y$ となる．それゆえ，x, y, z を通る軸は互いに直交していて，図 19.2 にあるように，3 つの軌道は $\{\pm x\}, \{\pm y\}, \{\pm z\}$ となる．

もし $|G_x|=|G_y|=2$ かつ $|G_z|=n\geq 3$ ならば，このとき，G は位数 $2n$ の群である．z を通る軸は固定部分群 G_z のすべての回転により固定される．それゆえ，G_z は位数 n の巡回群である．g が G_z を生成する極小な回転であるとする．点 x, $g(x)$, …, $g^{n-1}(x)$ はすべて異なる．これを理解するためには，$g^r(x)=g^s(x)$, $r>s$ とする．このとき，$g^{r-s}(x)=x$ である．しかし，z と $-z$ だけが g^{r-s} によって固定される極であり，$|G_x|=2$ であり，一方で $|G_{-z}|=|G_z|=n\geq 3$ であるから，x は $-z$ にはなり得ない．g は距離を保つから，

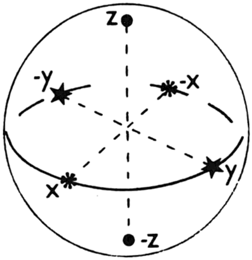


図 19.2

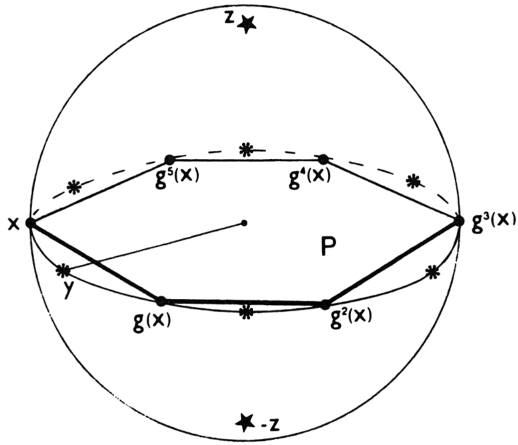


図 19.3

$$\|x - g(x)\| = \|g(x) - g^2(x)\| = \cdots = \|g^{n-1}(x) - x\|$$

を得る．それゆえ，x, $g(x)$, …, $g^{n-1}(x)$ は正 n 角形 P の頂点である．G は $2n$ の回転からなり，その各々は P をそれ自身に送るので，G は P の回転対称性の群でなければならない．ゆえに，G は **2 面体群**である．もちろん，P の面は原点を含み，z 軸に垂直である．x, y, z の軌道は図 19.3 に示されている．

(b) の場合． $|G_x| = 2$ かつ $|G_y| = |G_z| = 3$ であるならば，このとき，G は

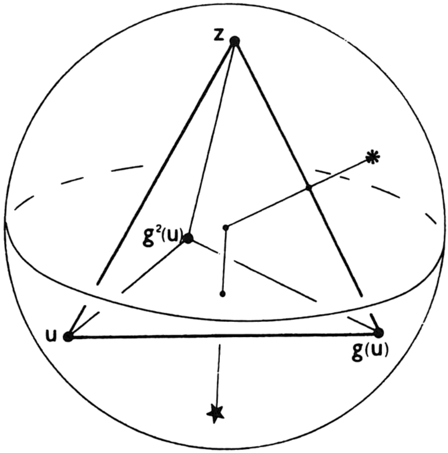


図 19.4

位数 12 の群である．z の軌道は 4 個の点からなる．そのうちの 1 つ，例えば，u，を $0 < \|z-u\| < 2$ となるように選び，G_z の生成元 g を選ぶ．このとき，u, $g(u)$, $g^2(u)$ はすべて異なる．g は距離を保つから，これらは z から等距離にあり，正 3 角形の頂点に位置する．z よりもむしろ u に焦点を当てると，z, $g(u)$, $g^2(u)$ は u から等距離にある．それゆえ，z, u, $g(u)$, $g^2(u)$ は**正 4 面体**の頂点となる．これは G のすべての回転によって自分自身に送られる．G が正しい位数（12）を持つので，これはこの正 4 面体の回転対称性の群でなければならない．図 19.4 は 3 つの軌道を示している．

(c) の場合． $|G_x| = 2$ かつ $|G_y| = 3$ かつ $|G_z| = 4$ であるならば，このとき，G は位数 24 の群である．z の軌道には 6 個の点がある．そのうちの 1 つ，例えば，u を z でも $-z$ でもないように選び，g を G_z の生成元とする．このとき，u, $g(u)$, $g^2(u)$, $g^3(u)$ はすべて異なり，z から等距離にあり，正方形の頂点に位置する．$G(z)$ の中にもう 1 点だけの余地がある．よって，この点は $-z$ でなければならない．同様に，$-u$ は $G(u) = G(z)$ に属する．この極

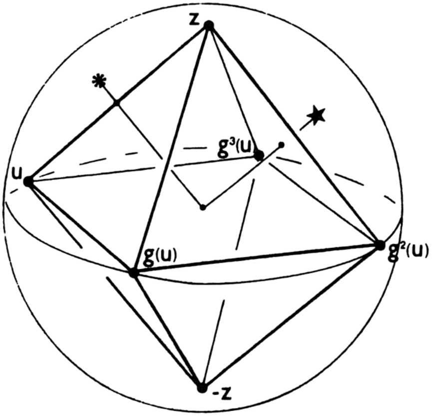


図 19.5

$-u$ は確かに z でも $-z$ でもなく，これは，$\|g(u)-u\| = \|g^3(u)-u\| < 2$ なので，$g(u)$ にも $g^3(u)$ にもなり得ない．よって，$-u$ は $g^2(u)$ でなければならない．それゆえ，$z, u, g(u), g^2(u), g^3(u), -z$ は正 **8** 面体の頂点となり，G はその回転対称性の群となる（図 19.5 を見よ）．

(d) の場合． $|G_x| = 2$ かつ $|G_y| = 3$ かつ $|G_z| = 5$ であるならば，このとき，G は位数 60 の群である．z の軌道には 12 個の点がある．そのうちの 2 つ，例えば，u と v，が

$$0 < \|z-u\| < \|z-v\| < 2$$

を満たすように選ぶ．なぜこのようなことができるか？もし g が G_z を生成する極小な回転であるならば，このとき $u, g(u), g^2(u), g^3(u), g^4(u)$ はすべて異なり，z から等距離にあり，正 5 角形の頂点に位置する．また，$v, g(v), g^2(v), g^3(v), g^4(v)$ はすべて異なり，z から等距離にあり（u よりもずっと離れている），正 5 角形の頂点をなす．これにより，$-z$ が $G(z)$ の 12 番目の点の唯一の候補として残される．u に注意を向けると，$-u \in G(u) = G(z)$ であることがわかる．$-u$ は u から距離 2 の位置にあるので，これは $v, g(v), g^2(v), g^3(v)$,

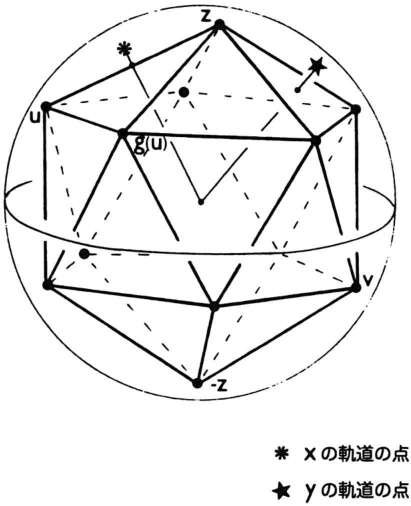


図 19.6

$g^4(v)$ のうちのどれか 1 つと同じでなければならない．必要ならば名前を付け替えることにして，図 19.6 にあるように，$-g^r(u) = g^r(v)$ $(1 \leq r \leq 4)$ であるとき，$-u = v$ となるように並べ替えることができる．u から見ると，11 個の点が見えるが，u に最も近い 5 個の点は u から等距離になければならない．これらは，z, $g(u)$, $g^2(v)$, $g^3(v)$, $g^4(u)$ である．それゆえ，

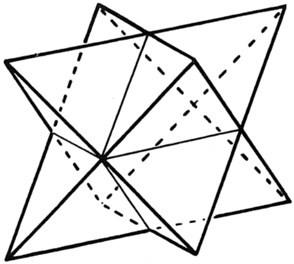
$$\|u - z\| = \|u - g(u)\| = \|u - g^2(v)\|$$

となる．今となっては，私たちの 12 個の点が**正 20 面体**の頂点にあること，そして，G がこの正 20 面体の回転対称性の群であることを確かめることは易しいことである．□

演習問題

19.1. 演習問題 9.8 で記述されている回転の極を見つけよ．

19.2. 2 つの正 12 面体を，それぞれの持つ 1 つの正 5 角形の面で貼り合わせる．この新しい立体の回転対称性の群を見つけよ．この場合のすべての対称性の



星型 8 面体

図 19.7

群は何か？

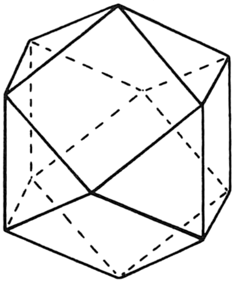
19.3. ある立体は，2 つの正 4 面体がそれらの辺が直角に 2 等分されるように配置されたものからできている（図 19.7）．この立体（**星型 8 面体** (stella octangula)）の回転対称性のなす群を見つけよ．

19.4. **立方 8 面体** (cuboctahedron)（図 19.8）の回転対称性の群は S_4 に同型であることを示せ．1 つの立方体は，底面を立方体の 1 つの面とし錐の頂点を立方体の重心とする，6 個の正 4 角錐からなる．これらの正 4 角錐をもう 1 つの立方体の面に載せることにより，**ひし形 12 面体** (rhombic dodecahedron) を得る．ひし形 12 面体の模型を作り，その双対図形が立方 8 面体であることを示せ．

19.5. *O_3 の有限部分群．* G を O_3 の有限部分群とし，H をその SO_3 との共通部分であるとする．もし G が行列 $-I$ を含むならば，G は $H \times \mathbb{Z}_2$ に同型であることを証明せよ．一方で，もし，$-I$ が G に属さないならば，写像 $A \to (\det A) \cdot A$ は G から SO_3 のある部分群への同型写像を与えることを示せ．すべての候補が次の表に載せられていることを確かめよ．

H	G		
$\{e\}$	$\{e\}$,	$\mathbb{Z}_2$	
$\mathbb{Z}_n$	$\mathbb{Z}_n$,	$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$,	$\mathbb{Z}_{2n}$
D_n	D_n,	$D_n \times \mathbb{Z}_2$,	D_{2n}
A_4	A_4,	$A_4 \times \mathbb{Z}_2$,	S_4
S_4	S_4,	$S_4 \times \mathbb{Z}_2$	
A_5	A_5,	$A_5 \times \mathbb{Z}_2$	

19.6. $\mathbb{Z}_{2n}, D_{2n}, A_4 \times \mathbb{Z}_2$ の各々をある適切な立体の（すべての）対称性の群とし



立方8面体

図 19.8

て実現せよ．

19.7. 回転対称性の群が SO_2 と O_2 のそれぞれに同型となるような立体を見つけよ．すべての対称性の群が $O_2 \times \mathbb{Z}_2$ に同型となる立体を見つけよ．$SO_2 \times \mathbb{Z}_2$ は立体の回転対称性の群としても，すべての対称性の群としても実現され得ないことを示せ．

19.8. SO_3 は $SO_2 \times SO_2$ に同型な部分群を含まないことを証明せよ．

第20章　シローの定理

G を有限群とし，その位数がある素数 p で割り切れるとする．$|G|$ の素因数の中で，p^m が最も大きな p のべき乗であるとし，$k = |G|/p^m$ とおく．

(20.1) 定理． 群 G は位数 p^m の部分群を少なくとも 1 つ含む．

(20.2) 定理． 群 G の位数 p^m の任意の 2 つの部分群は共役となる．

(20.3) 定理． G の位数 p^m の部分群の個数は p を法として 1 に合同であり，また，k の約数となる．

これらの定理は約 100 年以上も前にシロー (L. Sylow) によって初めて出版された．これから紹介する議論（最初のものは H. Wielandt, 1959 による）は軌道–固定部分群定理を繰り返し利用するものである．面倒な繰り返しを避けるため，この定理を利用する箇所は印 $(*)$ を付けておくことにする．

(20.1) の証明． X を p^m 個の元からなる G の部分集合のすべての集まりとし，G は X 上左移動で作用するものとする．これにより，群の元 $g \in G$ は部分集合 $A \in X$ を gA に送る．X の大きさは 2 項係数 $\binom{kp^m}{p^m}$ であり，これは p で割り切れない（演習問題 20.14 を見よ）．それゆえ，p の倍数でない大きさの軌道 $G(A)$ がなければならない．$|G| = |G(A)| \cdot |G_A|$　$(*)$ であるので，結果として，$|G_A|$ は p^m で割り切れる．ここで，G_A は A の固定部分群であったので，よって，$a \in A$ かつ $g \in G_A$ ならば，このとき $ga \in A$ となる．このことは，$a \in A$ である限り，すべての右剰余類 $G_A a$ は A に含まれることを意味する．よって，$|G_A|$ は p^m を超えることができない．それゆえ，G_A は位数 p^m を持つ G の部分群である．□

(20.2) と (20.3) の証明． $H_1, \ldots, H_t$ を G の部分群で位数 p^m を持つもの

とし，H_1 を $h \in H_1$ が H_j を hH_jh^{-1} へ送るように集合 $\{H_1, \ldots, H_t\}$ に共役で作用させよう．K_j を H_j の固定部分群とすると，$K_j = H_1 \cap H_j$ となる．(議論の流れを遮らないようにするため，これについては，下に補題として証明する．) 特に，$K_1 = H_1$ であり，H_1 の軌道は唯 1 つの元のみを持つ (*)．すなわち，それは H_1 自身である．もし j が 1 でなければ，K_j の位数は p^m よりも小さい p のべき乗となり，よって，その他すべての軌道の大きさは p の倍数になる (*)．軌道の大きさを足し上げることにより，t は p を法として 1 に合同であることが示される．

ここで，群 G 全体を $\{H_1, \ldots, H_t\}$ 上に共役で作用させよう．(20.2) を証明するために，この G-作用が推移的であることを確かめなければならない．各 G-軌道はいくつかの H_1-軌道からなる．H_1 の G-軌道は確かに H_1 を含んでおり，それゆえ，その大きさは p を法として 1 に合同である．ここで，H_r が H_1 の G-軌道の中にないとしよう．そして，H_r を $\{H_1, \ldots, H_t\}$ 上に共役で作用させよう．H_1 の G-軌道は今 H_r-軌道で分割されており，これら各々の大きさは p の倍数である（なぜならば，例外的な軌道 $\{H_r\}$ は存在しないからである）．これにより，$|G(H_1)|$ は p を法としてゼロに合同であるという結論を導く．これは私たちの以前の計算と一致しない．それゆえ，H_1 の G-軌道は必要とされていたように $\{H_1, \ldots, H_t\}$ のすべてでなければならない．

軌道の大きさはいつでも作用を引き起こす群の位数の約数であり (*)，今，t は kp^m を割ることがわかっている．しかし，p は t を割り切らないので，よって，t は k の約数でなければならない．私たちの議論は 1 つの詳細な点を除いて今終了した．

補題． K_j は H_1 と H_j の共通部分である．

補題の証明． 定義により，$K_j = \{h \in H_1 | hH_jh^{-1} = H_j\}$ であり，それゆえ，$K_j \subseteq H_1$ であり，$H_1 \cap H_j \subseteq K_j$ である．K_j が H_j に含まれていることを示さなければならない．確かに，$K_jH_j = H_jK_j$ であり，よって，K_jH_j は G の**部分群**である（演習問題 15.1 を見よ）．加えて，H_j は K_jH_j の中に正規部分群として含まれている．すると，第二同型定理により，

$$K_jH_j/H_j \cong K_j/(K_j \cap H_j)$$

となる．K_jH_j の位数はそれゆえ，$|K_j| \cdot |H_j|/|K_j \cap H_j|$ となり，これは p のべき乗である．しかし，p の最も大きなべき乗で，手に入るものは $p^m = |H_j|$ である．よって，$K_jH_j = H_j$ となり，必要とされていたように，$K_j \subseteq H_j$

が示された．これにて，(20.1)–(20.3) の証明が終了した．□

位数 12 の群を分類する手助けとしてシローの定理を使おう．初めに，些細ではあるが，役に立つ考察をしよう．もし，H が G の部分群だとすると，各共役 gHg^{-1} もまた G の部分群となり，H と同じ位数を持つ．それゆえ，もし G が H と同じ位数の部分群を他に持たなければ，H は G の**正規**部分群でなければならない．

位数 12 の群の分類

G を 12 個の元を含む群とし，これが位数 3 の部分群を t 個含むものとする．シローの定理により，t は 3 を法として 1 に合同であり，また，4 の約数であることがいえる．**それゆえ，G は位数 3 の 1 つの部分群，これは正規部分群でなければならない，を含むか，位数 3 の 4 つの共役な部分群を含むかのいずれかである．**これらの 2 つの場合を分けて扱うことにしよう．シローの定理は位数 4 の 1 つの部分群を含むか，位数 4 の 3 つの部分群を含むかのいずれかであることもまた主張していることに注意しよう．

場合 1． G が位数 3 の正規部分群 H で x で生成されるものを含むとする．K を位数 4 の部分群とする．このとき，K は巡回群であるか，クラインの群 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ に同型な群であるかのいずれかである．

(a) しばらくの間，K は**巡回群**であるとし，K の生成元 y を選ぶ．単位元は H と K の両方に属する唯一の元である．よって，剰余類 H, Hy, Hy^2, Hy^3 はすべて異なり，$HK = G$ となる．H は正規部分群であるので，yxy^{-1} は H に属することがわかる．

(i) $yxy^{-1} = x$ ならば，このとき G はアーベル群で，(10.1) と (10.2) により，

$$G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$$

となる．

(ii) 残りの可能性 $yxy^{-1} = x^2$，同値であるが，$yx = x^2y$ は，

$$\begin{aligned} y^2x &= yx^2y = x^2yxy \\ &= x^4y^2 = xy^2 \end{aligned}$$

を導く．よって，x は y^2 と交換し，元 $z = xy^2$ は**位数 6** を持つ．また，

$$
\begin{aligned}
z^3 &= x^3y^6 = y^2,\\
yz &= yxy^2 = y^3x\\
&= y^2x^2y = z^{-1}y
\end{aligned}
$$

もまた成り立つ．y の位数は 4 である．それゆえ，y は $\langle z\rangle$ に属さず，剰余類 $\langle z\rangle, \langle z\rangle y$ で G は埋め尽くされる．これらの元は次のように掛け合わされる．

$$
\begin{aligned}
z^a z^b &= z^{a+b},\\
z^a(z^b y) &= z^{a+b}y,\\
(z^a y)z^b &= z^{a-b}y,\\
(z^a y)(z^b y) &= z^{a-b}y^2 = z^{a-b+3}.
\end{aligned}
$$

ここで，z のべき乗は 6 を法として読む．結合法則が成り立つことを確かめるには，少々忍耐が必要である．が，実際地味な作業である．こうして，私たちは 1 つの群を得る．この群は**2 重巡回群**の仲間に属し，この最初のものは 4 元数群 Q である（演習問題 20.15 を見よ）．

(b) 次に，K が**クラインの群**に同型であるとする．この群の元を e, u, v, w と記号で表す．ここで，$w = uv$ かつ $u^2 = v^2 = e$ である．再び，$H \cap K = \{e\}$ であり，剰余類 H, Hu, Hv, Hw は G を埋め尽くし，$HK = G$ となる．H は G の中で正規部分群であるので，

$$
uxu^{-1} = x^a, \quad vxv^{-1} = x^b, \quad wxw^{-1} = x^{ab}
$$

が成り立つ．ここで，a, b, ab の各々は $+1$ か -1 のいずれかである．

(iii) $a = b = ab = +1$ ならば，この群は**アーベル群**であり，$H \times K$ に同型である．ゆえに，

$$
G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2
$$

を得る．

(iv) そうでなければ，a, b, ab のうちの 2 つが -1 で，残り 1 つが $+1$ である．必要ならば u, v, w の記号を付け直して，$a = +1$, $b = -1$ となるようにする．このとき，u は x と交換し，$z = ux$ は位数 6 を持つ．元 z, v でともに G を生成し，これらは $z^6 = e, v^2 = e, vz = z^{-1}v$ を満たすので，位数 12 の **2 面体群**に同型な群を与える． □

場合 2. G が位数 3 の 4 つの共役な部分群を含むならば，これらの部分群は $G-\{e\}$ から 8 個の元を費やして，位数 4 の唯 1 つの部分群 K のために残りの余地を与えることになる．

(c) まず最初に，K は巡回群になり得ないことを示そう．K が巡回群であるとし，元 y で生成されるものとし，x を $G-K$ の元とする．このとき，x は位数 3 を持つ．そして，剰余類 K, Kx, Kx^2 は G を埋め尽くす．K は G の中で正規部分群でなければならないから，$xyx^{-1} \in K$ となる．もし，$xyx^{-1} = y$ ならば，このとき G はアーベル群であり，G が位数 3 の 4 つの共役な部分群を含むという仮定に矛盾する．y と y^2 は異なる位数を持つから，$xyx^{-1} = y^2$ は意味のない式であることがわかる．最後に，$xyx^{-1} = y^3$ は成り立ち得ない．なぜならば，これは

$$y = x^3yx^{-3} = y^{27} = y^3$$

を導くからである．

(d) 位数 4 の正規部分群 K は，それゆえ**クラインの群**と同型にならなければならない．この元を以前のように e, u, v, w と記号で表し，x を位数 3 を持つ G の元とする．剰余類 K, Kx, Kx^2 はすべて異なり，よって，u, v, x で G を生成する．x による共役は 3 つの元 u, v, w の間で置換として働く．というのも，K は G の正規部分群で，この置換は恒等置換であるか，$x^3 = e$ だから，ある 3-サイクルであるかのいずれかとなるからである．

(v) 恒等置換を得ることはあり得ない．なぜならば，これはアーベル群を導き，ゆえに，上のように矛盾を導くからである．

(vi) 必要ならば，記号を付け替えて，$xux^{-1} = v, xvx^{-1} = w, xwx^{-1} = u$ と仮定してよい．このとき，対応

$$u \longleftrightarrow (12)(34), \qquad v \longleftrightarrow (13)(24),$$
$$x \longleftrightarrow (234)$$

は G と交代 群 A_4 の間の同型写像を定める．　□

位数 12 のどのような群も次のうちの 1 つに同型となることを私たちは証明した：巡回群 $\mathbb{Z}_{12}$，直積群 $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$，2 面体群 D_6，位数 12 の 2 重巡回群，交代群 A_4.

演習問題

G の位数は kp^m と仮定する．ここで，p は素数で，k の約数ではないものとする．このとき，p^m 個の元を持つ G の任意の部分群は G の**シロー p-部分群** (Sylow p-subgroup) と呼ばれる．また，素数 p を強調する必要のない場合には単に**シロー部分群** (Sylow subgroup) と呼ばれる．

20.1. 位数 126 の群は位数 7 の正規部分群を含まなければならないことを示せ．位数 1,000 の群は，単純群であり得ないことを証明せよ．

20.2. A_5 のすべてのシロー部分群を書き下せ．これらの部分群のうち正規部分群となるものがあるか？

20.3. もし G のすべてのシロー部分群が正規部分群ならば，G は G のシロー部分群の直積に同型であることを示せ．

20.4. 位数 1,225 を持つ群を分類せよ．

20.5. 有限アーベル群は各位数が素数のべき乗となるような有限個の（アーベル）群の直積に同型であることを証明せよ．

次の 3 つの演習問題では，p と q はともに素数であり，p は q よりも大きいものとする．

20.6. もし p が q を法として 1 に合同でなければ，位数 pq のどのような群も巡回群であることを示せ．

20.7. p が q を法として $+1$ とも -1 とも合同にならないとき，位数 p^2q の群を分類せよ．

20.8. p^2 が q を法として 1 に合同ではなく，q^2 が p を法として 1 に合同ではないと仮定する．位数 p^2q^2 を持つ群を分類せよ．

20.9. p をある有限群 G の位数の素因数とする．もし，H が G の正規部分群で，その指数が p の倍数でないならば，H は G のすべてのシロー p-部分群を含まなければならないことを示せ．

20.10. H が G のシロー部分群であるとし，J を G の部分群で H を含むものとする．もし H が J の中の正規部分群であって，J が G の中の正規部分群であるならば，H は G の正規部分群となることを証明せよ．

20.11. H を G の部分群とし，H の G における左剰余類の集合を X と書くことにする．式

$$g(xH) = gxH$$

は G の X 上への作用を定めることを示せ．H が G の正規部分群であることの必要十分条件は，H に誘導された X 上の作用によるどの軌道もただ 1

点だけからなることであることを証明せよ．

20.12. G を有限群とし，p を $|G|$ の素因子の中で最小のものとする．指数 p を持つ G の部分群は G の正規部分群でなければならないことを証明せよ．(演習問題 20.11 で定義された作用を使ってもよい.)

20.13. J を位数が素数 p のべき乗であるような G の部分群であるならば，J は G のあるシロー p-部分群に含まれなければならないことを確かめよ．(H を演習問題 20.11 のシロー p-部分群となるように取り，X 上への J の誘導された作用を考えよ.)

20.14. もし p が素数で，k が p の倍数でなく，$0 \le x \le p^m - 1$ であるならば，$(kp^m - x)/(p^m - x)$ は p で割り切れないことを示せ．

20.15. m を 2 以上のある整数とする．$4m$ 個の元

$$e, x, \ldots, x^{2m-1}, y, xy, \ldots, x^{2m-1}y$$

から始めて，これらを次のようにして掛け合わせる．

$$\begin{aligned} x^a x^b &= x^{a+b}, \\ x^a(x^b y) &= x^{a+b}y, \\ (x^a y)x^b &= x^{a-b}y, \\ (x^a y)(x^b y) &= x^{a-b+m}. \end{aligned}$$

ここで，$0 \le a, b \le 2m-1$ であり，x のべき乗は $2m$ を法として読む．これは群 G を定め，$m = 2$ のときには，4 元数群と同型となることを確かめよ．G を位数 $4m$ の **2 重巡回群** (dicyclic group) という．

第21章　有限生成アーベル群

群は，生成元の有限集合を持つとき，**有限生成** (finitely generated) であるといわれる．有限生成アーベル群は分類される．これは，どの2つも同型にはならないような,「標準的な」例のリスト（それが無限であろうとも）を作成することができることを意味する．その結果，もし**任意の**有限生成アーベル群が提示されたら，それは私たちのリスト上の1つに同型となる．

(21.1) 定理. どのような有限生成アーベル群も巡回群の直積群

$$\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k} \times \mathbb{Z}^s$$

に同型である．ここで，$1 \leq i \leq k-1$ に対して m_i は m_{i+1} の約数である．

$\mathbb{Z}^s$ を整数の加法群の s 個のコピーの直積群の省略形として使うものとする．数 s はこの群の**階数** (rank) であり，$m_1, m_2, \ldots, m_k$ はその**ねじれ係数** (torsion coefficients) である．上の定理の2つの特殊な場合は別々に述べるに値する．

(21.2) 系. どのような有限アーベル群も巡回群の直積群

$$\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$$

に同型である．ここで，$m_1 | m_2 | \cdots | m_k$ である[1]．（ここで，階数 s はゼロである.)

(21.3) 系. 有限位数を持たないどのような有限生成アーベル群も有限個の $\mathbb{Z}$ の コピーの直積群に同型である．

（これは，k がゼロになることを許せば，一般の定理の主張と合致する．s 個

[1] ［訳注］記号 $n|m$ で n は m を割り切ることを意味する．

の $\mathbb{Z}$ のコピーの直積群に同型な群は階数 s の**自由アーベル群** (free abelian group) と呼ばれる.)

例. (i) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$ のような群にだまされてはいけない. 6 は 10 の約数ではないから, 見た目で混乱してしまうかもしれない. しかし, (10.1) を使えば,

$$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{30}$$

であるから, これは私たちのリストに載っている.

(ii) 位数 12 のアーベル群は, $\mathbb{Z}_{12}$ か $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ のいずれかに必ず同型である. これは 20 章にある私たちの計算を支持する.

(iii) 2 つの元 -1 と $i/2$ で生成される $\mathbb{C} - \{0\}$ の部分群は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ に同型である.

(iv) $\mathbb{R}$ は有限生成ではない（演習問題 21.12）. それゆえ, これは私たちのリスト上の群のどれとも同型にならない.

G を有限生成アーベル群とし, $x_1, \ldots, x_r$ は G を生成する互いに異なる元とする. もし $r-1$ 個の元の集合で G を生成するものがないならば, $x_1, \ldots, x_r$ は生成元の**極小**な集合であるという. 私たちの群はアーベル群なので, 各 $g \in G$ は語として特に良い形に書き表すことができる. つまり,

$$g = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} \tag{$*$}$$

と単に様々な生成元のべき乗を集めた形で書くことができる. ここで, $n_1, \ldots, n_r$ は整数である. 次の形の表現

$$e = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} \tag{$**$}$$

は生成元の間の**関係式**と呼ばれる. q が整数ならば,

$$x_1 x_2^q, x_2, \ldots, x_r$$

もまた G に対する生成元の極小な集合であることに注意せよ. なぜならば, 各語

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$$

はこれらの新しい生成元を用いて,

$$(x_1 x_2^q)^{n_1} x_2^{n_2 - qn_1} x_3^{n_3} \cdots x_r^{n_r}$$

と書き直すことができるからである.

(21.1) の証明. まず最初に G が生成元 $x_1, \dots, x_r$ の極小な集合を持ち, それらの間の唯一の関係式が $(**)$ において, $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = 0$ とおくことによって得られる自明なものであると仮定しよう. このとき, これらの生成元の言葉で記された g に対する式 $(*)$ は, 一意的であり, 対応

$$g \longmapsto (n_1, n_2, \dots, n_r)$$

は G と $\mathbb{Z}^r$ の間の同型写像である.

一般の場合は, 想像されるように, もっと工夫が必要である. 今, 私たちは, たとえどのように G に対する生成元の極小な集合を選んだとしても, 常にそれらの間に非自明な関係式があるという状況にある. **生成元のすべての可能な極小な集合の間にあるすべての関係式の中で, 最小な正の指数がある. 例えば, それを m_1 とする.** m_1 が生成元 $x_1, \dots, x_r$ の間の関係式

$$e = x_1^{m_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} \qquad (***)$$

において, x_1 の指数として現れるものとする. m_1 は n_2 の約数であることを主張する. というのも, $n_2 = qm_1 + u, 0 \le u < m_1$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} e &= x_1^{m_1} x_2^{qm_1+u} x_3^{n_3} \cdots x_r^{n_r} \\ &= (x_1 x_2^q)^{m_1} x_2^u x_3^{n_3} \cdots x_r^{n_r} \end{aligned}$$

となる. $x_1 x_2^q, x_2, \dots, x_r$ もまた生成元の極小な集合であるので, u がゼロでない限り, m_1 の選び方 (最小の正の指数であったので) に矛盾する. よって, 必要とされていたように, $n_2 = qm_1$ を得る. 同様な方法で, m_1 は $n_3, \dots, n_r$ の各々の約数であることが示される. そこで, $n_i = q_i m_1, 3 \le i \le r$ とおく.

生成元 $z_1, x_2, \dots, x_r$ の新しい集合に変えよう. ここで,

$$z_1 = x_1 x_2^q x_3^{q_3} \cdots x_r^{q_r}$$

である. 関係式 $(***)$ は今や

$$e = z_1^{m_1}$$

になったことに注意せよ. 私たちの m_1 の最初の選び方は, z_1 の, より小さな正のべき乗は単位元とはならないことを保証する. よって, m_1 は z_1 の位数である. $H = \langle z_1 \rangle$ とし, G_1 を $x_2, \dots, x_r$ によって生成される部分群とする. $HG_1 = G$ と $H \cap G_1 = \{e\}$ が成り立つことは容易に確かめられる. そ

れゆえ，(10.2) により，$G \cong H \times G_1 \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times G_1$ を得る．

さて，G_1 を扱って，全く同じ手順に従おう．再び，2 つの可能性 $G_1 \cong \mathbb{Z}^{r-1}$ と $G_1 \cong \mathbb{Z}_{m_2} \times G_2$ がある．このように，もとの群 G は $\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}^{r-1}$ に同型となり，この場合には証明は終了する，あるいは $\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times G_2$ と同型となる．後者の場合，G_2 の生成元 $y_2, \ldots, y_r$ の極小な集合の間の次の関係式の，例えば，y_2 の指数として，整数 m_2 が現れるとする．

$$e = y_2^{m_2} y_3^{n'_3} \cdots y_r^{n'_r}.$$

$z_1, y_2, \ldots, y_r$ は G の生成元の極小な集合であり，

$$e = z_1^{m_1} y_2^{m_2} y_3^{n'_3} \cdots y_r^{n'_r}$$

であるので，m_1 は m_2 の約数であることがわかる．今や私たちは証明に必要なすべての基本的な素材を手に入れた．G_2 について議論を続ける．この過程はやがて終了する．なぜならば，各段階において，生成元の数が 1 つだけ減少するのだから． □

私たちの分類を完成させるためには，2 つの有限生成アーベル群が同型であるときに，それらは同じ階数と同じねじれ係数を持つことを示さなければならない．

(21.4) 定理. $G_1 = \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k} \times \mathbb{Z}^s$ とする．ここで $m_1 | m_2 | \cdots | m_k$ である．また，$G_2 = \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_l} \times \mathbb{Z}^t$ とする．ここで $n_1 | n_2 | \cdots | n_l$ である．G_1 と G_2 が同型ならば，このとき，$s = t, k = l$，かつ $1 \leq i \leq k$ に対して $m_i = n_i$ である．

次の簡単な考察が必要となる．

(21.5) 補題. m, q を正の整数とする．$0 \leq r < m$ かつ $m | qr$ を満たす整数 r の数は m と q の最大公約数である．

証明. もし d が m と q の最大公約数ならば，$m = m'd$, $q = q'd$ とおき，$\mathrm{hcf}(m', q') = 1$ となるようにする[2]．$m | qr$ なので，$m'd | q'dr$ となり，それゆえ，$m' | r$ となる．これは，r が $0, m', 2m', \ldots, (d-1)m'$ のうちの 1 つであることを意味する．逆に，これらの整数の各々が私たちの 2 つの仮定を満たしていれば，実際に d 個の可能性がある． □

2 ［訳注］$\mathrm{hcf}(m, q)$ で m と q の最大公約数を表す．

(21.6) 補題. $H \cong \mathbb{Z}_m$ ならば，$x^q = e$ を満たす元 $x \in H$ の数は m と q の最大公約数である．もし，$H \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$ ならば，この数は $\mathrm{hcf}(m_1, q) \cdot \mathrm{hcf}(m_2, q) \cdots \mathrm{hcf}(m_k, q)$ となる．

証明. この数は同型写像により保たれる．よって，最初の部分は単に (21.5) を再度主張したものにすぎない．($\mathbb{Z}_m$ における群演算は m を法とした足し算であるので，ある元 r の q 乗は m が qr を割り切るときに限り単位元になる.) 2番目の部分について，もし $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ の q 乗が $\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$ において単位元となるとすると，このとき，r_1 については $\mathrm{hcf}(m_1, q)$ 個の選び方があり，r_2 については $\mathrm{hcf}(m_2, q)$ 個の選び方があり，などとなる． □

(21.4) の証明 — ねじれ係数. G_1 における有限位数の元の集まりは部分群 $H_1 = \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k} \times \{e\}$ をなし，G_2 についても同様に部分群 $H_2 = \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_l} \times \{e\}$ をなす．G_1 と G_2 の間の同型写像は有限位数の元を有限位数の元へ送る．それゆえ，H_1 は H_2 と同型である．議論のために $k \geq l$ と仮定し，(21.6) を H_1, H_2 の各々へ $q = m_1$ として適用する．すると，$\mathrm{hcf}(m_1, m_1) \cdot \mathrm{hcf}(m_2, m_1) \cdots \mathrm{hcf}(m_k, m_1) = \mathrm{hcf}(n_1, m_1) \cdot \mathrm{hcf}(n_2, m_1) \cdots \mathrm{hcf}(n_l, m_1)$ となる．つまり，

$$m_1^k = \mathrm{hcf}(n_1, m_1) \cdot \mathrm{hcf}(n_2, m_1) \cdots \mathrm{hcf}(n_l, m_1)$$

となる．右辺の各因子は，高々m_1 である．よって，$l = k$ かつ $m_1 | n_1$ とならなければならない．ここで，同じトリックを $q = n_1$ に適用して，

$$\mathrm{hcf}(m_1, n_1) \cdot \mathrm{hcf}(m_2, n_1) \cdots \mathrm{hcf}(m_k, n_1) = n_1^k$$

となる．これは，$n_1 | m_1$ を与える．**この時点で，$k = l$ と $m_1 = n_1$ となることがわかる．**

(21.6) を再び H_1 と H_2 へ $q = m_2$ として適用すると，このとき，

$$\begin{aligned} m_1 m_2^{k-1} &= \mathrm{hcf}(n_1, m_2) \cdot \mathrm{hcf}(n_2, m_2) \cdots \mathrm{hcf}(n_k, m_2) \\ &= m_1 \cdot \mathrm{hcf}(n_2, m_2) \cdots \mathrm{hcf}(n_k, m_2) \end{aligned}$$

となり，これは $m_2 | n_2$ を与える．$q = n_2$ と取れば，

$$m_1 \cdot \mathrm{hcf}(m_2, n_2) \cdots \mathrm{hcf}(m_k, n_2) = m_1 n_2^{k-1}$$

を得る．よって，$n_2 | m_2$ を得る．**ゆえに，m_2 は n_2 に等しい．** q を m_3 に取り，そして，次に n_3 など，この過程を続けることは読者へ委ねよう． □

(21.7) 補題. $\mathbb{Z}^s$ が $\mathbb{Z}^t$ に同型であるならば，$s=t$ である．

証明. s が t 以下であると仮定する．$\varphi : \mathbb{Z}^s \to \mathbb{Z}^t$ を同型写像とし，$\mathbb{Z}^t$ を成分がすべて整数である点からなる $\mathbb{R}^t$ の部分群と考えることにする．$\mathbb{Z}^s$ の元で i 番目の成分が1で，その他のすべての成分がゼロであるものを x_i と表すことにする．$(r_1, \ldots, r_s) \in \mathbb{Z}^s$ とすると，このとき，

$$(r_1, \ldots, r_s) = r_1 x_1 + \cdots + r_s x_s,$$
$$\varphi(r_1, \ldots, r_s) = r_1 \varphi(x_1) + \cdots + r_s \varphi(x_s)$$

が成り立つ．よって，φ の像は $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_s)$ で張られる $\mathbb{R}^t$ の部分空間に含まれる．$\mathbb{Z}^t$ が含まれるためには，この部分空間は $\mathbb{R}^t$ の**全体**でなければならない．それゆえ，必要とされていたように，$s=t$ となる．　□

(21.4) の証明 — 階数. 私たちには G_1 から $\mathbb{Z}^s$ への準同型写像

$$(r_1, \ldots, r_k, r_{k+1}, \ldots, r_{k+s}) \longmapsto (r_{k+1}, \ldots, r_{k+s})$$

がある．これは全射で，核は H_1 そのものである．よって，第一同型定理により，G_1/H_1 は $\mathbb{Z}^s$ に同型である．同様に，G_2/H_2 は $\mathbb{Z}^t$ に同型である．以前に説明したように，G_1 と G_2 の間の同型写像は，H_1 を H_2 へ送る．ゆえに，これより，商群 G_1/H_1 から G_2/H_2 への同型写像が誘導される．結果として，(21.7) により，$s=t$ を得る．　□

(21.1) の私たちの証明は，効率的であるが，与えられた生成元の集合と関係式からアーベル群を識別するのにはさほど役には立たない．次の章で，これを実行する体系的な方法を示そう．使われる方法は，行列の行と列の操作である．よって，群の演算については $x+y$ と，単位元については0と，x の逆元については $-x$ と，加法的な記号へ変えることにする．すると，(21.1) の標準形は，$k+s$ 個の**生成元** $x_1, \ldots, x_{k+s}$ で定められるアーベル群で，**関係式**

$$m_1 x_1 = 0, \ldots, m_k x_k = 0$$

を満たすもの，と呼ばれる．これは商群 A/N に同型である．ここで，A は自由アーベル群であり，その元は整数を係数とする線型結合

$$n_1 x_1 + \cdots + n_{k+s} x_{k+s}$$

で表される．N は $m_1 x_1, \ldots, m_k x_k$ で生成される A の部分群である．

演習問題

21.1. 次の各々のねじれ係数を見つけよ.

(a) $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{20}$　(b) $\mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{42}$

(c) $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{16}$

21.2. G を位数 100 のアーベル群とする. G は位数 10 の元を含まなければならないことを示せ. もし G の元で位数が 10 を超えるものがなければ, G のねじれ係数は何か？

21.3. 有限アーベル群の位数が平方数で割り切れなければ, 群は巡回群でなければならないことを示せ.

21.4. 位数 81, 144, 216 のアーベル群をそれぞれ分類せよ.

21.5. p を素数とする. あるアーベル群は位数 p^n を持ち, 位数 p の元を $p-1$ 個含むという. この群は巡回群であることを示せ.

21.6. G, A, B が有限アーベル群で, $G \times A$ が $G \times B$ に同型ならば, A は B に同型であることを証明せよ.

21.7. G が位数 360 の有限アーベル群で, 位数 12, 18 の元をどれも含まないものとする. G のねじれ係数を見つけよ. G は位数 6 の元を何個含むか？

21.8. $\mathbb{R} - \{0\}$ の有限生成な自明でない部分群は $\mathbb{Z}_2$ あるいは, ある正の整数 s に対して, $\mathbb{Z}^s, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^s$ のいずれかに同型でなければならないことを証明せよ.

21.9. G を有限アーベル群とし, G の元 x で $x^q = e$ を満たすものの数を $\#(q)$ と書く. $\#(2) = 16, \#(4) = 32, \#(3) = 9, \#(9) = 81$ かつすべての $x \in G$ に対して $x^{36} = e$ となるとき, G のねじれ係数を見つけよ.

21.10. 前問と同様に, 今度は, $\#(2) = 4, \#(3) = 3, \#(5) = 125$ かつすべての $x \in G$ に対して $x^{30} = e$ となるとき, G のねじれ係数を見つけよ.

21.11. 次の各々をアーベル群化し, 結果として得られるアーベル群のねじれ係数を書き下せ.

(a) $Q \times S_4$　(b) $D_{12} \times A_4$

(c) $G \times \mathbb{Z}_{10}$, ここで, G は位数 12 の 2 重巡回群である.

21.12. すべての有限生成群は**可算**であることを示すことにより, $\mathbb{R}$ は有限個の元によって生成され得ないことを証明せよ.

21.13. G をアーベル群とし, 加法的な記法を用いることにする. $x \in G$ と正の整数 m が与えられたとき, $my = x$ となる G の元 y を常に見つけることができるとき, G を**可除群** (divisible group) という. 例えば, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, C$ はすべて可除群である. $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}^{\mathrm{pos}}$ は可除群でないことを示せ. 自明でない可除群は有限生成になり得ないことを証明せよ.

21.14. $\mathbb{Q}^{\mathrm{pos}}$ は任意の大きな値 s に対して，階数 s の自由アーベル群を含むことを示せ．

第22章　行と列の操作

有限生成アーベル群の生成元と関係式を道具にして，(21.1) で与えられる標準形の群を認識できるようにしたい．これを行う効果的な手順が以下に与えられる．この章を通じて，加法的な記号を用いることにする．まずは例から始めよう．

例 (i)．G を生成元 x, y, z と次の関係式で定められるアーベル群とする．

$$3x + 5y - 3z = 0, \tag{R$_1$}$$

$$4x + 2y = 0. \tag{R$_2$}$$

つまり，G は商群 A/N に同型である．ここで，A は整数係数の線型結合 $ax + by + cz$ という元からなる自由アーベル群であり，N は A の部分群で，$3x + 5y - 3z$ と $4x + 2y$ で生成されるものである．(R_2) から (R_1) を引くと，

$$x - 3y + 3z = 0 \tag{R$_3$}$$

を得る．また，(R_1) から (R_3) の 3 倍を引くと，

$$14y - 12z = 0 \tag{R$_4$}$$

を得る．$u = 3x + 5y - 3z, v = 4x + 2y$ とすれば，これまで私たちがしてきたことのすべては，N に対する生成元を u, v から

$$u,\ v - u = x - 3y + 3z$$

へ変更し，さらに，

$$v - u,\ u - 3(v - u) = 14y - 12z$$

へ変更したことになる．それゆえ，関係式 (R_1) と (R_2) を使おうが (R_3) と

(R_4) を使おうが，同じ群 G を得る．(R_4) を書き直して，

$$\begin{aligned}14y - 12z &= 2y + 12(y - z)\\ &= 2(y + 6(y - z)) = 0\end{aligned}$$

とし，

$$x' = x - 3y + 3z,\quad y' = y + 6(y - z),\quad z' = y - z$$

とおく．以下に見るように，何段階かに分けて x, y, z から x', y', z' への変形を分解してみれば，このとき，x', y', z' は，G に対する生成元の新しい集合となる．つまり，

$$\begin{gathered}x, y, z\\ x - 3y,\quad y,\quad z\\ x - 3y + 3z,\quad y,\quad z\\ x - 3y + 3z,\quad y,\quad y - z\\ x - 3y + 3z,\quad y + 6(y - z),\quad y - z\end{gathered}$$

と分解するのである．関係式 (R_3)，(R_4) は今や単にそれぞれ $x' = 0$ と $2y' = 0$ へと簡略化された．よって，x' は何の役割も果たさず，G は位数 2 の元 y' と無限位数を持つ元 z' によって生成される．結果として，G は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ と同型でなければならない．

これらの操作のすべてはもともとの関係式 (R_1) と (R_2) の係数行列を用いることにより，便利に要約することができる．対応する段階は次のようになる．

$$\begin{pmatrix}3 & 5 & -3\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1 行目を引く}]{\text{2 行目から}} \begin{pmatrix}3 & 5 & -3\\ 1 & -3 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{入れ替える}]{\text{1, 2 行目を}} \begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & 5 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1 行目×3 を引く}]{\text{2 行目から}} \begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 0 & 14 & -12\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{1 列目×3 を足す}]{\text{2 列目に}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 14 & -12\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1 列目×3 を引く}]{\text{3 列目から}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 14 & -12\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{3 列目を足す}]{\text{2 列目に}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -12\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2 列目×6 を足す}]{\text{3 列目に}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

この最後の行列が新しい関係式 $x' = 0, 2y' = 0$ を表している．これにより，

先ほどと同様に G に対する標準形 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ を読み取ることができる．

一般の過程は，今やこの単純な例から発展していく．G が生成元 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ と関係式

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0
\end{gathered}
$$

により定まるアーベル群ならば，次の操作を用いることにより，係数行列 $A = (a_{ij})$ を簡単にする．

(I) 2 つの行または 2 つの列を入れ替える．
(II) 1 つの行または 1 つの列のすべての成分を -1 倍する．
(III) ある行の整数倍を他の行に加える．あるいはある列の整数倍を他の列に加える．

行に関する操作は関係式を変え，列に関する操作は生成元を変える一方で，**群 G はずっと同じものに保たれたままである．**生成元と関係式の新しい集合が私たちの群を標準形に表してくれることを望むのだが，これは次の結果によって保証される．

(22.1) 定理． 成分が整数である $m \times n$ 行列 A が与えられたとき，A を対角行列 D へと変換するような操作 I, II, III の有限列がある．ここで，$d_{ii} \geq 0, 1 \leq i \leq k$ であり，$d_{11}|d_{22}|\cdots|d_{kk}$ である．また，$k = \min(m, n)$ である．

適切な新しい生成元 $x'_1, \ldots, x'_n$ の言葉を使えば，行列 D は関係式 $d_{11}x'_1 = 0, \ldots, d_{kk}x'_k = 0$ を表している．d_{ii} を省略して，d_i と書き，$d_1 \geq 2, d_k \neq 0$ と仮定する．このとき，G の標準形は，

$$\mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d_k} \times \mathbb{Z}^{n-k}$$

である．もし，例えば，$d_1 = \cdots = d_s = 1$ かつ $d_{t+1} = \cdots = d_k = 0$ ならば，生成元 $x'_1, \ldots, x'_s$ は余分であり，一方，$x'_{t+1}, \ldots, x'_k$ は無限位数を持つ．それゆえ，この場合標準形は，

$$\mathbb{Z}_{d_{s+1}} \times \mathbb{Z}_{d_{s+2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d_t} \times \mathbb{Z}^{n-t}$$

となる．

(22.1) の証明の概略.「概略」といっているのは，あまりに形式的に議論を進めると，証明のアイディアが簡単なものの，それを見失ってしまいがちだからである．A がゼロ行列であれば，何もすることはない．そうでない場合，A は少なくとも1つはゼロでない成分を持つ．操作 (I) と (II) を用いれば，最初の成分 a_{11} が正となるような行列を作ることができる（これもまた A と呼ぶことにする）．1行目を見てみよう．a_{11} の倍数ではない成分 a_{1j} を見かければ，a_{1j} を a_{11} で割って，$a_{1j} = qa_{11} + u$ を得る．ここで，$0 < u < a_{11}$ である．j 列目から1列目の q 倍を引いて（操作 (III)），新しい j 列目と1列目を入れ替える（操作 (I)）．結果として得られる行列は，最初の成分が u である．ここで，u が1行目の他のすべての成分を割り切れるかどうかを問題としよう．もし答えが，割り切れない，であれば，ここまでの手順を繰り返して，最初の成分 v が正で u より小さいような行列を作る．この手順は際限なく続くことはあり得ない．なぜならば，正の整数の**減少**列 $a_{11}, u, v, \ldots$ は途中で止まらなければならないからである．ゆえに，有限回の手順で，最初の成分が1行目のその他のすべての成分を割り切るような行列 B を得る．操作 (III) を使って，B の1列目の適当な整数倍を他の残りの列から引くことにより，b_{11} 以外の1行目のすべての成分を0にする．ここで，1列目に着目して，列の操作の代わりに行の操作を用いて，次の形の行列にたどり着くまで，上と全く同じように議論を進める．

$$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

この時点でサイズのより小さい行列 C_1 について議論を進めたくなるかもしれないが，次の形の行列を得るまで上の手順を続ける．

$$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & C_2 & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix} \qquad (**)$$

など．これにより，対角行列を得るが，残念ながら，その対角成分は続けざまに互いを割らないかもしれない．そこで，代わりに，C_1 のすべての成分が

c_{11} の倍数であるかどうかを問題としよう．もし c_{11} が c_{ij} を割り切らないならば，$(*)$ の i 行目を 1 行目に加えて，**一番最初に行ったのと全く同じ手順を再び始める**．このことが，c_{11} より小さい正の最初の成分を持つ，$(*)$ の新しい形式であることを導くことを理解するまでは，とても気がめいることだろう．最初の成分が残りのすべての成分を割り切る $(*)$ の形の行列にたどり着くまで，手順を繰り返す（これもまた有限回の手順で終わらなければならない）．これにより，最初の成分は私たちの求める最初の対角成分 d_{11} となる．ここで，C_1 に対応するよりサイズの小さい行列を簡単な形にすることを始めることができる．そして，自信を持って，

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \boldsymbol{C_3} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

なる行列にたどり着くことができるのである．ここで，$d_{11}|d_{22}$ であり，C_3 のすべての元は，d_{22} の倍数である．すべての手順は最終的に要求されていた行列 D にて終了することになる．　□

例 (ii)．G は元 x, y で生成され，関係式 $2x = 0, 3y = 0$ で定められるアーベル群であるとする．すぐさま，G は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ と認識でき，その標準形は $\mathbb{Z}_6$ である．上の手順により，

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2 行目を足す}]{\text{1 行目に}} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1 列目を引く}]{\text{2 列目から}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{入れ替える}]{\text{1，2 列目を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1 列目×2 を引く}]{\text{2 列目から}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{1 行目×3 を引く}]{\text{2 行目から}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(−1) 倍する}]{\text{2 列目を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

を得る．この新しい表示は，$x' = 0, 6y' = 0$ となる生成元 x', y' を持つ．したがって，実際に $\mathbb{Z}_6$ を得る．

例 (iii)．G は生成元 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 で生成され，関係式

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 10x_4 - 15x_5 &= 0 \\ 4x_2 - 8x_4 + 12x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 9x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 - 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

によって定められるアーベル群であるとする．以下に，係数行列を対角行列へ変形する方法を示そう．(22.1) の手順を厳密に追う必要はない．近道を取ることにしよう．ここで，例えば，すぐさま 4, 5 列目を取り除くことができる．これらはどちらも 2 列目の整数倍になっているのである．紙面の節約のため，各々の矢印はいくつかの行または列の操作を表すものとする．

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 10 & -15 \\ 0 & 4 & 0 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & -2 & 6 & -9 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって，G は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に同型である．(ここで，$m = k = 4$, $n = 5$, $s = 1$, $t = 3$ である．)

演習問題

22.1. 生成元 x_1, x_2, x_3, x_4 で生成され，関係式

$$9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0$$
$$6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 11x_4 = 0$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0$$

によって定められるアーベル群の階数とねじれ係数を求めよ．

22.2. あるアーベル群は 5 個の生成元と 4 個の関係式によって定められ，関係式の係数行列は

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & -3 & 1 \\ 8 & 2 & -2 & -8 & 2 \\ 11 & -8 & 9 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

で与えられる．この群は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}$ に同型であることを示せ．

22.3. G は生成元 x_1, x_2, x_3, x_4 で生成され，関係式

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 0$$
$$5x_1 + x_2 - x_3 + 12x_4 = 0$$
$$2x_1 + 4x_2 + 11x_3 - 3x_4 = 0$$

によって定められるアーベル群とする．G は自由アーベル群であることを証明し，その階数を求めよ．

22.4. 行と列の整数を用いた操作は，正方行列の行列式にどのような影響を与えるか？

22.5. アーベル群 G は生成元 x, y, z と，関係式

$$3x + 2y + 4z = 0$$
$$6x + y + 7z = 0$$
$$2x + 3y + 6z = 0$$

によって定められる．これらの関係式の係数行列の行列式の値を計算せよ．行列式の値は G に関する何らかの情報を与えるか？ G の階数とねじれ係数を求めよ．

22.6. n 個の生成元と n 個の関係式が与えられ，これにより 1 つのアーベル群 G が定まる．関係式の係数行列の行列式の値がゼロでないとき，G について何をいうことができるか？ この行列の行列式の値が $+1$ または -1 のとき，何が起こるか？

第23章　自己同型写像

群 G の**自己同型写像** (automorphism) とは，G から G への同型写像をいう．すべての自己同型写像のなす集合は写像の合成により群をなす．これを G の**自己同型群** (automorphism group) と呼び，$\mathrm{Aut}(G)$ と書く．

例.
(i) $\mathbb{Z}$ の自己同型写像 θ は，1 を $\mathbb{Z}$ を生成する整数に送らなければならない．それゆえ，$\theta(1) = \pm 1$ となる．もし $\theta(1) = 1$ ならば，恒等的な自己同型写像を得る．そうでなければ，$\theta(1) = -1$ であり，θ は各整数 n を $-n$ へ送る．すぐさまに，$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}_2$ に同型であることがわかる．

(ii) 対応 $x \to x^{-1}$ は任意のアーベル群の自己同型写像を定める．

(iii) G を $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ とする．自己同型写像は単位元とは異なる 3 個の元を置換する．e を e に送るものとしたとき，任意のこのような置換は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の自己同型写像となることは容易に確かめられる．それゆえ，$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ は S_3 に同型である．

(iv) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ は，11 章で導入された群 R_n に同型である．R_n の元は n より小さい正の整数で n と互いに素となるものである．群の操作は，n を法とした掛け算である．θ が $\mathbb{Z}_n$ の自己同型写像とする．このとき，$\theta(1)$ は $\mathbb{Z}_n$ を生成する．結果として，$\theta(1)$ と n の最大公約数は 1 でなければならない．対応 $\theta \to \theta(1)$ は $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ と R_n の間の同型写像である．演習問題 23.4 において，この有限アーベル群 R_n の構造を具体的に調べることとしよう．

(v) 自己同型写像は各元の位数を保つ．よって，S_3 の自己同型写像は互換 $(12), (13), (23)$ を互いに置換しなければならない．逆に，$(12), (13), (23)$ に

ついてのどの置換も S_3 の自己同型写像を定める．ゆえに，$\mathrm{Aut}(S_3)$ は S_3 に同型である．

(vi) θ を $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ の自己同型写像とする．θ が $(1,0)$ を (a,b) へ送り，$(0,1)$ を (c,d) へ送るとすると，このとき，

$$\begin{aligned}\theta(m,n) &= m\theta(1,0)+n\theta(0,1)\\ &= (ma+nc, mb+nd)\\ &= (m,n)\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり，θ は整数を成分に持つ 2×2 の行列によって表現される．θ は可逆であり，θ の逆もまた整数を成分とする行列によって表現されなければならないから，上の行列の行列式の値 $ad-bc$ は 1 または -1 に等しくなければならない．$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ は 2×2 行列の群 $GL_2(\mathbb{Z})$ に同型である．これは整数を成分に持ち，行列式の値が ± 1 となるものである．

(vii) G の固定された元 g による共役は特別な形の自己同型写像 $x\to gxg^{-1}$ を与える．これは**内部自己同型写像** (inner automorphism) と呼ばれる．内部自己同型写像は $\mathrm{Aut}(G)$ における正規部分群 $\mathrm{Inn}(G)$ をなす．もし G がアーベル群であれば，恒等的な自己同型写像だけが内部自己同型写像となる．

(23.1) 定理． $\mathrm{Inn}(G)$ は商群 $G/Z(G)$ に同型である．

証明． 各 g を内部自己同型写像 $x\to gxg^{-1}$ へ送る写像 $G\to\mathrm{Aut}(G)$ は準同型写像である．その像は内部自己同型写像からなり，核は，

$$\begin{aligned}\{g \in G | x = gxg^{-1}, \forall x\in G\}\\ = \{g\in G | xg = gx, \forall x\in G\}\\ = Z(G)\end{aligned}$$

となる．今や結果は第一同型定理より従う． □

(23.2) 定理． p, q が素数で，$p>q$ かつ $q\nmid(p-1)$ を満たすならば[1]，このとき，位数 pq のすべての群は巡回群である．

[1] ［訳注］$q\nmid(p-1)$ は，$(p-1)$ は q で割り切れないことを表す．($q\mid(p-1)$ の否定を表す記号．)

証明. シローの定理（演習問題 20.6 を見よ）を適用するか，次のように証明を進めるかのいずれかである．G を位数が pq である群とする．位数 p の元 x と位数 q の元 y を選び，$H = \langle x \rangle$ とおく．まず初めに H が G の正規部分群であることを示そう．G における H の左剰余類の集合は q 個の元を持ち，H はこの集合上に左移動で作用する．つまり，$h \in H$ は剰余類 gH を hgH へ送る．各軌道の大きさは高々q であり，$|H| = p$ の約数でなければならない．ゆえに，どの軌道も唯 1 つの剰余類を含むことになる．別の言い方をすれば，$hgH = gH$ がすべての $g \in G$ とすべての $h \in H$ に対して成り立つ．これを書き直して，

$$g^{-1}hg \in H, \quad \forall g \in G,\ h \in H$$

となる．これよりすぐに H が G の正規部分群であることがわかる．

元 y は H の自己同型写像 $h \to yhy^{-1}$ を与え，この位数は q の約数であり（$y^q = e$ だから），$p-1$ の約数である（ラグランジュの定理による．なぜなら，$|\mathrm{Aut}(H)| = |\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p)| = p-1$ であるから）．$q \nmid (p-1)$ なので，この位数は 1 であり，恒等的な自己同型写像を得る．それゆえ，$yh = hy$ がすべての $h \in H$ に対して成り立つ．もし，$K = \langle y \rangle$ ならば，このとき，$HK = G, H \cap K = \{e\}$ であり，$h \in H, k \in K$ である限り $hk = kh$ である．結果として，(10.2) より，

$$G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{pq}$$

となる．□

群 H, J と準同型写像 $\varphi : J \to \mathrm{Aut}(H)$ が与えられたとする．φ によって定められる H と J の**半直積** (semidirect product) と呼ばれる新しい群 $H \times_\varphi J$ を次のように構成しよう．その元は順序付けられた組 (x, y) で，ここで，$x \in H, y \in J$ である．積は

$$(x, y)(x', y') = (x \cdot \varphi(y)(x'), y \cdot y')$$

により定められる．この積の最初の成分は，自己同型写像 $\varphi(y)$ を x' に適用し，その結果に x を左から掛けることにより得られる．強調するために，H と J の両方における積を点 $(\cdot)$ を打って表してある．単位元は (e_H, e_J) であり，(x, y) の逆元は，$(\varphi(y)^{-1}(x^{-1}), y^{-1})$ である．結合法則は次の計算から従う．

$$[(x, y)(x', y')](x'', y'') = (x \cdot \varphi(y)(x'), y \cdot y')(x'', y'')$$

$$
\begin{aligned}
&= (x \cdot \varphi(y)(x') \cdot \varphi(y \cdot y')(x''), y \cdot y' \cdot y'') \\
&= (x \cdot \varphi(y)(x' \cdot \varphi(y')(x'')), y \cdot y' \cdot y'') \\
&\qquad\qquad (\varphi \text{ は準同型写像だから}) \\
&= (x, y)(x' \cdot \varphi(y')(x''), y' \cdot y'') \\
&= (x, y)[(x', y')(x'', y'')].
\end{aligned}
$$

写像 $(x, y) \to y$ は $H \times_\varphi J$ から J の上への準同型写像であり，その核 $\{(x, e_J)|x \in H\}$ は H に同型である．よって，$H \times_\varphi J$ の中に正規部分群として H のコピーを持つ．半直積の中に J のコピー，つまり，$\{(e_H, y)|y \in J\}$ もあるが，この部分群は必ずしも正規部分群であるとは限らない．

φ が J のすべての元を H の恒等的な自己同型写像へ送るならば，10 章で導入された直積 $H \times J$ を再現する．次の結果は (10.2) の一般化に当たる．

(23.3) 定理． H, J は群 G の部分群とする．H が正規部分群で，$HJ = G$ かつ $H \cap J = \{e\}$ ならば，G は半直積 $H \times_\varphi J$ に同型である．ここで，$\varphi : J \to \mathrm{Aut}(H)$ はすべての $x \in H, y \in J$ に対して，$\varphi(y)(x) = yxy^{-1}$ によって定められる準同型写像である．

証明． 写像 $\psi : H \times_\varphi J \to G$ を $\psi(x, y) = xy$ により定める．このとき，ψ は準同型写像である．なぜならば，

$$
\begin{aligned}
\psi[(x, y)(x', y')] &= \psi(x \cdot \varphi(y)(x'), y \cdot y') \\
&= \psi(xyx'y^{-1}, y \cdot y') \\
&= xyx'y^{-1}yy' \\
&= xyx'y' \\
&= \psi(x, y)\psi(x', y')
\end{aligned}
$$

となるからである．$G = HJ$ なので，ψ の像は G のすべてとなる．よって，G のすべての元は，ある $x \in H, y \in J$ に対して，xy の形に書かれる．(x, y) が ψ の核に属するなら，$xy = e$ だから，$x = y^{-1}$ となる．よって，x と y はともに $H \cap J = \{e\}$ に属し，(x, y) は $H \times_\varphi J$ の単位元となる．(16.3) により，ψ は同型写像である． □

例．

(i) S_3 において，部分群 $H = \langle(123)\rangle$ と $J = \langle(12)\rangle$ は，(23.3) の仮定を満

たす．よって，S_3 は半直積 $\mathbb{Z}_3 \times_\varphi \mathbb{Z}_2$ に同型である．ここで，φ は $\mathbb{Z}_2$ の生成元を $\mathbb{Z}_3$ の非自明な自己同型写像へ送る．

(ii) 平面の等長変換（距離を保つ変換）は**ユークリッド群**と呼ばれる群 E_2 をなす．T を E_2 の部分群で，すべての平行移動からなるものとし，O を直交変換 $f_A, A \in O_2$ の部分群とする．次の章で，T は E_2 の正規部分群であり，$TO = E_2, T \cap O = \{I\}$ であることを確かめることになる．よって，E_2 は半直積 $T \times_\varphi O$ である．ここで，$\varphi : O \to \mathrm{Aut}(T)$ は共役によって誘導される．

演習問題

23.1. D_4 と D_5 の自己同型群を見つけよ．

23.2. $\mathrm{Aut}(Q)$ と $\mathrm{Inn}(Q)$ を具体的に求めよ．

23.3. $Z(G) = \{e\}$ ならば，G の自己同型群の中心は恒等的な自己準同型写像だけを含むことを証明せよ．

23.4. m を正の整数とする．$m \geq 3$ のとき，R_{2^m} は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^{m-2}}$ に同型であること，p が奇素数のとき，R_{p^m} は位数 $p^{m-1}(p-1)$ の巡回群であることを，それぞれ示せ．これにより，演習問題 11.6 を用いれば，任意の正の整数 n に対して R_n のねじれ係数を計算できるようになる．

23.5. G の部分群 H は，G のすべての自己同型写像によって H が自分自身に送られるとき，G の**特性部分群** (chracteristic subgroup) と呼ばれる．$Z(G)$ と $[G, G]$ はともに G の特性部分群であることを示せ．

23.6. 正規部分群はすべての内部自己同型写像によって不変となる部分群に他ならない．群 G と，その正規部分群で特性部分群とならない例を挙げよ．

23.7. G と H を位数が互いに素である有限群とする．$G \times \{e\}$ と $\{e\} \times H$ はともに $G \times H$ の特性部分群であることを示せ．$\mathrm{Aut}(G \times H)$ は $\mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(H)$ に同型であることを証明せよ．

$H \times_\varphi J$ の形の群を，H の J による半直積と呼ぶことにする．

23.8. 位数 12 の 2 重巡回群は $\mathbb{Z}_3$ の $\mathbb{Z}_4$ による半直積に同型であることを証明せよ．

23.9. Q は 2 つの非自明な群の半直積に同型とはならないことを示せ．

23.10. G をアーベル群とし，半直積 $G \times_\varphi \mathbb{Z}_2$ を $G \widetilde{\times} \mathbb{Z}_2$ と書く．ここで，$\varphi : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(G)$ は 1 を G の自己同型写像 $x \to x^{-1}$ へ送るものである．$\mathbb{Z}_n \widetilde{\times} \mathbb{Z}_2$ は D_n に同型であること，$\mathbb{Z} \widetilde{\times} \mathbb{Z}_2$ は D_∞ に同型であること，$SO_2 \widetilde{\times} \mathbb{Z}_2$ は O_2 に同型であること，をそれぞれ証明せよ．

23.11. 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定理 23.3 の構成法を使って，O_3 を SO_3 の $\mathbb{Z}_2$ による半直積として表せ．この半直積と $SO_3 \times \mathbb{Z}_2$ との間の同型写像を見つけよ．

23.12. G を $(x, y) \to (x+1, y)$ と $(x, y) \to (-x, y+1)$ で生成される $\mathbb{R}^2$ の距離を保つ変換のなす群とする．G は半直積 $\mathbb{Z} \times_\varphi \mathbb{Z}$ に同型であることを証明せよ．ここで，φ は 1 を $\mathbb{Z}$ の非自明な自己同型写像へ送るものとする．

第24章　ユークリッド群

平面の**等長変換** (isometry) は，写像の合成を積として群をなす，いわゆる，**ユークリッド群** (Euclidean group) E_2 である．写像 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は，距離を保つと仮定すれば，E_2 に属する．つまり，$\mathbb{R}^2$ に属するすべての点 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の組に対して，

$$\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

ということである．$g, h \in E_2$ ならば，

$$\begin{aligned}\|g(h(\mathbf{x})) - g(h(\mathbf{y}))\| &= \|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})\| \\ &\qquad (g \text{ が等長変換だから}) \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \\ &\qquad (h \text{ が等長変換だから})\end{aligned}$$

となる．よって，$gh \in E_2$ となる．写像の合成は結合的であり，平面の恒等変換は単位元として作用する．最後に，各 $g \in E_2$ は全単射であり，

$$\begin{aligned}\|g^{-1}(\mathbf{x}) - g^{-1}(\mathbf{y})\| &= \|g(g^{-1}(\mathbf{x})) - g(g^{-1}(\mathbf{y}))\| \\ &\qquad (g \text{ が等長変換だから}) \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|\end{aligned}$$

を満たす．よって，$g^{-1} \in E_2$ となり，実際に群を得る．

回転，反転，平行移動はすべて馴染み深い等長変換である．ベクトル $\mathbf{v}$ による**平行移動**とは，すべての $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して，$\tau(\mathbf{x}) = \mathbf{v} + \mathbf{x}$ と定められる変換 $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ をいう．$\tau(\mathbf{0}) = \mathbf{v}$ なので，平行移動は原点がどこに送られるかを知れば，完全に決定される．

E_2 の一般の元は，**原点を中心とした回転とそれに続く平行移動の合成か，**

原点を通る直線に対する反転とそれに続く平行移動の合成であるかのいずれかであること示すことから始めよう．このために，$g \in E_2$ は点 $\mathbf{0}$ を点 $\mathbf{v}$ へ送るものとする．τ を $\mathbf{v}$ による平行移動とする．このとき，等長変換の合成 $f = \tau^{-1}g$ は原点を動かさない． f は $\mathbf{0}$ を中心とした回転であるか，$\mathbf{0}$ を通る直線に対する反転であるかのいずれかであることを主張する．$\mathbf{p} = (1, 0)$ と $\mathbf{q} = (0, 1)$ を基準点として取る．今後，$f(\mathbf{x})$ のことを $\mathbf{x}'$ と省略して書くことにしよう．$\mathbb{R}^2$ の各点 $\mathbf{x}$ は次の 3 つの値で完全に定められる．

$$\|\mathbf{x}\|, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|.$$

なぜならば，中心が同一直線上にない 3 つの円は，高々1 点で交わるからである（図 24.1）．同じ理由で，$\mathbf{x}'$ は $\mathbf{0}, \mathbf{p}', \mathbf{q}'$ からの距離によって定められる．しかし，

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}'\|, \ \|\mathbf{x}' - \mathbf{p}'\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|, \ \|\mathbf{x}' - \mathbf{q}'\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|$$

である．よって，$\mathbf{p}'$ と $\mathbf{q}'$ の位置がわかれば，平面のすべての点に対する f の効果がわかることになる．図 24.2 に示されるように，2 つの可能性がある．

$$\|\mathbf{p}'\| = \|\mathbf{p}\| = 1, \ \|\mathbf{q}'\| = \|\mathbf{q}\| = 1, \ \|\mathbf{p}' - \mathbf{q}'\| = \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| = \sqrt{2}$$

であるので，角 $\mathbf{p}'\mathbf{0}\mathbf{q}'$ は直角である．よって，反時計回りの θ 回転は，$\mathbf{p}$ を $\mathbf{p}'$ へ写し，$\mathbf{q}$ を $\mathbf{q}'$ か $-\mathbf{q}'$ のいずれかへ回転させる．最初の場合は，f は原

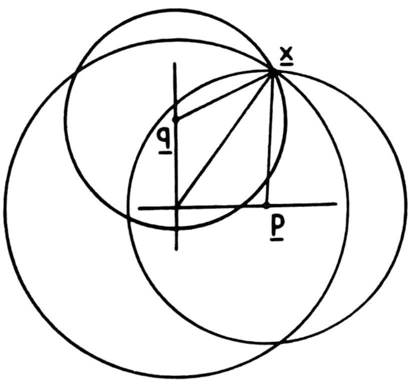


図 24.1

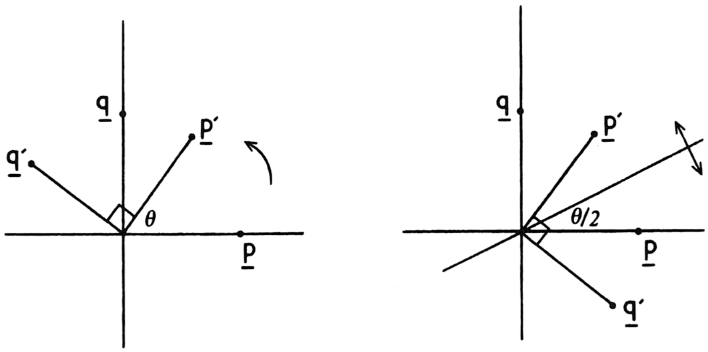


図 24.2

点を中心とする反時計回りの θ 回転であり，2 番目の場合 f は，x-軸の正方向から測って $\theta/2$ の角度にある，原点を通る直線に対する反転である．g は f の後に τ を合成したものであるから，これで議論は終了である．

平行移動の集まりは，E_2 の中の部分群 T をなす．これは (5.1) を使えば，容易に確かめられる．$\tau_1, \tau_2 \in T$ がすべての $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して，$\tau_1(\mathbf{x}) = \mathbf{u} + \mathbf{x}, \tau_2(\mathbf{x}) = \mathbf{v} + \mathbf{x}$ と定められているならば，このとき，

$$\begin{aligned} \tau_1\tau_2^{-1}(\mathbf{x}) &= \tau_1((-\mathbf{v}) + \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{u} + ((-\mathbf{v}) + \mathbf{x}) \\ &= (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{x} \end{aligned}$$

となる．よって，$\tau_1\tau_2^{-1}$ は $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ による平行移動であり，それゆえ，T に属する．O を E_2 の部分群で，**直交変換**からなるものとする．別の言い方をすれば，O の元は原点を中心とする回転と，原点を通る直線に対する反転である．先の段落の議論は，$E_2 = TO$ であることを示している．

すべての非自明な平行移動で原点は動かされる一方で，O のすべての元は原点を動かさないので，T と O の共通部分は恒等変換だけである．ここで，通常の議論により，各等長変換は直交変換の後に平行移動を施すという形に**唯一**通りに表すことができる．というのも，$g = \tau f = \tau' f'$, $\tau, \tau' \in T$ かつ $f, f' \in O$ とすれば，$(\tau')^{-1}\tau = f' f^{-1}$ は $T \cap O$ に属するから，よって，$\tau = \tau', f = f'$ となる．$g = \tau f$ で，f が回転であるとき，g は**直等長変換** (direct isometry) と呼ばれ，残りの場合，f が反転のときは，g は**反等長変**

換 (opposite isometry) と呼ばれる．

$f \in O, \tau \in T, \tau(\mathbf{0}) = \mathbf{v}$ とする．このとき，各 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して，

$$\begin{aligned} f\tau f^{-1}(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{v} + f^{-1}(\mathbf{x})) \\ &= f(\mathbf{v}) + f(f^{-1}(\mathbf{x})) \quad (f \text{ は線型変換だから}) \\ &= f(\mathbf{v}) + \mathbf{x} \end{aligned}$$

を得る．よって，共役 $f\tau f^{-1}$ はベクトル $f(\mathbf{v})$ による平行移動である．T と O の元で E_2 を生成しているので，T は（(15.2) を使えば）E_2 の**正規**部分群であることがわかる．

これで分解 $E_2 = TO$ における群の積構造を理解することができる．$g = \tau f$, $h = \tau_1 f_1$, $\tau, \tau_1 \in T, f, f_1 \in O$ とすれば，

$$gh = \tau f \tau_1 f_1 = (\tau f \tau_1 f^{-1})(f f_1)$$

は gh を直交変換の後に平行移動したものと表したものである．言い換えると，対応

$$g \longmapsto (\tau, f)$$

は E_2 と**半直積** $T \times_\varphi O$ の間の同型写像である．ここで，$\varphi : O \to \mathrm{Aut}(T)$ は共役で与えられる．

少し違った記号を使うと，具体的な計算がとても要領よく実行できる．$g = \tau f, \tau \in T, f \in O$ とする．$\mathbf{v} = \tau(\mathbf{0})$ かつ M は $\mathbb{R}^2$ の標準基底に対して f を表す直交行列とすれば，すべての $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して，

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{v} + f_M(\mathbf{x}) = \mathbf{v} + \mathbf{x}M^t \qquad (*)$$

が成り立つ．逆に，$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ と $M \in O_2$ が与えられたとき，式 $(*)$ は平面の等長変換を定める．それゆえ，各等長変換を**順序付けられた組** $(\mathbf{v}, M)$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, M \in O_2$ として考え，掛け算は以下で与えられるものとして考えてよい．

$$(\mathbf{v}, M)(\mathbf{v}_1, M_1) = (\mathbf{v} + f_M(\mathbf{v}_1), MM_1).$$

どうしてもとても正確でなければならないというのであれば，E_2 を半直積 $\mathbb{R}^2 \times_\psi O_2$ と同一視しているという説明になる．ここで，準同型写像 $\psi : O_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の O_2 の通常の作用である．$(\mathbf{v}, M)$ は，$\det M = +1$ のときは直等長変換であり，$\det M = -1$ のときは反等長変換であることに注意しよう．

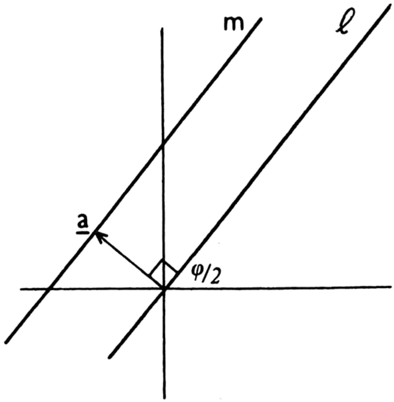


図 24.3

「最も簡単な」等長変換は，順序付けられた組として容易に記述される．

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}$$

とし，ℓ, m を図 24.3 に描かれている直線とする．

(a) ベクトル $\mathbf{v}$ による**平行移動**は $(\mathbf{v}, I)$ になる．ここで，I は 2×2 の単位行列である．
(b) 原点を中心とする反時計回りの θ **回転**は，$(\mathbf{0}, A)$ である．
(c) 直線 ℓ に対する**反転**は，$(\mathbf{0}, B)$ である．
(d) 点 $\mathbf{c}$ を中心とする反時計回りの θ **回転**は，$(\mathbf{c}-f_A(\mathbf{c}), A)$ である．
(e) 直線 m に対する**反転**は，$(2\mathbf{a}, B)$ である．$f_B(\mathbf{a})=-\mathbf{a}$ に注意．

(d) と (e) はいずれも何らかの説明が必要だろう．点 $\mathbf{c}$ を中心とする回転は，図 24.4 に示されているように，各ベクトル $\mathbf{x}$ を $\mathbf{c}+f_A(\mathbf{x}-\mathbf{c})$ へと送る．そして，

$$\begin{aligned}\mathbf{c}+f_A(\mathbf{x}-\mathbf{c}) &= \mathbf{c}+f_A(\mathbf{x})-f_A(\mathbf{c})\\ &= (\mathbf{c}-f_A(\mathbf{c}))+f_A(\mathbf{x})\end{aligned}$$

と求められた形になる．m に対する反転を実現するためには，まず初めに m が ℓ 上に写るよう $-\mathbf{a}$ だけ平行移動する．それから l に対して反転し，最後に

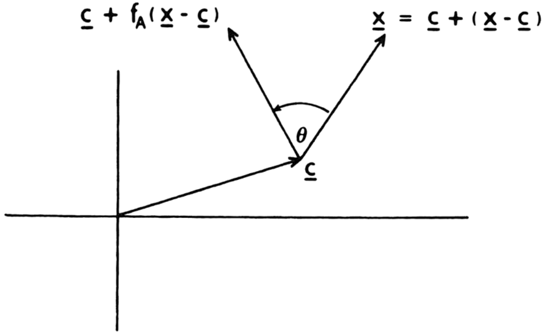


図 24.4

l を平行移動して m へ戻す．よって，$\mathbf{x}$ は $\mathbf{x}-\mathbf{a}$ に写り，それから $f_B(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ へ写り，そして最後に

$$\begin{aligned}\mathbf{a}+f_B(\mathbf{x}-\mathbf{a}) &= \mathbf{a}+f_B(\mathbf{x})-f_B(\mathbf{a}) \\ &= \mathbf{a}+f_B(\mathbf{x})+\mathbf{a} \\ &= 2\mathbf{a}+f_B(\mathbf{x})\end{aligned}$$

へと写る．

ある直線に対する反転の後にその直線と平行な直線の上で平行移動することを**滑り反転** (glide reflection) と呼ぶ．直線として m を取るとき，m に沿った各滑り反転は次の形で与えられる．

$$(2\mathbf{a}+\mathbf{b}, B).$$

ここで，$f_B(\mathbf{b})=\mathbf{b}$ かつ $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ である．

(24.1) 定理． すべての直等長変換は，平行移動か回転である．すべての反等長変換は反転か滑り反転である．

証明． 直等長変換は，順序付けられた組 $(\mathbf{v}, A)$ によって表される．ここで，$0\leq\theta<2\pi$ である．$\theta=0$ のとき，**平行移動** $(\mathbf{v}, I)$ を得る．そうでなければ，

$$\det(I-A)=\det\begin{pmatrix}1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}=2-2\cos\theta$$

は正である．ゆえに，$I-A$ は可逆で，式

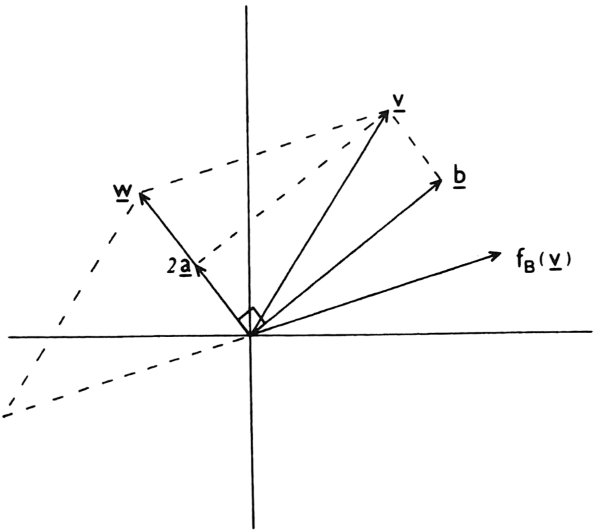


図 24.5

$$\mathbf{c} - f_A(\mathbf{c}) = f_{I-A}(\mathbf{c}) = \mathbf{v}$$

は $\mathbf{c}$ について，唯 1 つの解を持つ．与えられた等長変換は，この点 $\mathbf{c}$ に対する**回転** $(\mathbf{c} - f_A(\mathbf{c}), A)$ である．

各反等長変換は，順序付けられた組 $(\mathbf{v}, B)$ によって表される．ここで，$0 \leq \varphi < 2\pi$ である．$f_B(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ ならば，$\mathbf{a} = \mathbf{v}/2$ となる直線 m に対する**反転**となる．$f_B(\mathbf{v}) \neq -\mathbf{v}$ ならば，$\mathbf{w} = \mathbf{v} - f_B(\mathbf{v})$ とおき，次の変形に注目する．

$$\begin{aligned} f_B(\mathbf{w}) &= f_B(\mathbf{v} - f_B(\mathbf{v})) \\ &= f_B(\mathbf{v}) - f_B^2(\mathbf{v}) \\ &= f_B(\mathbf{v}) - \mathbf{v} = -\mathbf{w}. \end{aligned}$$

図 24.5 にあるように，$\mathbf{w}$ に沿って $\mathbf{v}$ を分解すると，ベクトル $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|^2)\mathbf{w}$ となり，等長変換は**滑り反転** $(2\mathbf{a}+\mathbf{b}, B)$ となる．ここで，$2\mathbf{a} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|^2)\mathbf{w}$，$\mathbf{b} = \mathbf{v} - 2\mathbf{a}$ である． □

例 (i)． 変換 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は

$$g(x,y) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y), 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)\right)$$

で与えられる等長変換であり，対応する順序付けられた組 $(\mathbf{v}, M)$ は，$\mathbf{v} = (1, 1-\sqrt{2})$ と

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

である．$\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ なので，これは反時計回りの $\pi/4$ **回転**である．その中心 $\mathbf{c}$ は，

$$\mathbf{c} - f_M(\mathbf{c}) = \mathbf{c} - \mathbf{c}M^t = \mathbf{v}$$

で与えられるので，これより，

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{v}(I - M^t)^{-1} \\ &= (1, 1-\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= (1, 1) \end{aligned}$$

となる．よって，g は点 $(1,1)$ を中心とする反時計回りの $\pi/4$ 回転である．

例 (ii)．$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が

$$h(x,y) = \left(-\frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y), 4 + \frac{1}{2}(y - \sqrt{3}x)\right)$$

で与えられるとき，h は等長変換 $(\mathbf{v}, M)$ である．ここで，$\mathbf{v} = (0, 4)$ であり，

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

である．この行列 M は反転を表しており，

$$f_M(\mathbf{v}) = \mathbf{v}M^t = (-2\sqrt{3}, 2)$$

である．$f_M(\mathbf{v})$ は $-\mathbf{v}$ に等しくないので，与えられた等長写像は滑り反転である．先に使用した記号を用いて，

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - f_M(\mathbf{v}) = (2\sqrt{3}, 2),$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=8,\quad \|\mathbf{w}\|^2=16,$$
$$2\mathbf{a}=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|^2)\mathbf{w}=(\sqrt{3},1),$$
$$\mathbf{b}=\mathbf{v}-2\mathbf{a}=(-\sqrt{3},3)$$

となる．滑り反転の反転部分の直線は $\mathbf{a}$ を通り，$\mathbf{b}$ に平行である．よって，その式は，

$$y-\frac{1}{2}=-\sqrt{3}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\quad \text{または}\quad \sqrt{3}x+y=2$$

となる．h を施すためには，この直線に対して初めに反転し，$\mathbf{b}=(-\sqrt{3},3)$ だけ平行移動することになる．

演習問題

24.1. 次の各回転を順序付けられた組 $(\mathbf{v},M)$ として書き表せ．ここで，$\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2, M\in O_2$ である．
(a) 点 $(-1,-1)$ を中心とする反時計回りの $\frac{\pi}{6}$ 回転．
(b) 点 $(1,2)$ を中心とする時計回りの $\frac{\pi}{3}$ 回転．

24.2. 直線 $x+y+3=0$ に対する反転と直線 $\sqrt{3}y-x=4$ に対する反転のそれぞれを順序付けられた組として表せ．

24.3. π 回転は通常半回転 (half-turn) と呼ばれる．2 つの半回転の積は常に平行移動であることを証明せよ．

24.4. すべての等長変換は 2 つあるいは 3 つの反転の積のいずれかとして表されることを示せ．

24.5. すべての反等長変換は反転とそれに続く半回転の合成に分解されることを証明せよ．

24.6. h が軸 m に対する滑り反転で，g が等長写像であるならば，ghg^{-1} は直線 $g(m)$ に沿った滑り反転であることを示せ．

24.7. 直線 m に対する反転に続いて直線 m' に対する反転を施すことは，m が m' と平行であるときは平行移動であり，そうでなければ，回転であることを示せ．

24.8.
$$f(x,y)=\left(3-\sqrt{3}-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y,-3-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)$$
は回転であることを証明せよ．回転の中心と回転角を求めよ．

24.9.

$$g(x,y) = \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 14, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 3\right)$$

は滑り反転を表すことを示せ．滑り反転の軸とこの軸に関して点をどれだけ平行移動させたかを求めよ．

24.10.

$$h(x,y) = \left(6 - \frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y, 4 - \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y\right)$$

は反転であることを証明し，その鏡[1]を求めよ．

[1] ［訳注］この場合の鏡とは，反転に対する対称軸の直線を表す．

第25章　格子と点群

図 25.1 は正 6 角形による繰り返し模様を示している．もしこれを際限なく続ければ，**平面全体を埋め尽くす**．この模様はいくつかの対称性を持つ．例えば，平行移動 τ_1, τ_2，x-軸に対する反転，原点を中心とする反時計回りの $\pi/3$ 回転のいずれかを施すならば，正 6 角形は正 6 角形に写り，模様は保たれる．図 25.2 のように各正 6 角形の一部に陰影を付けると，回転対称性が壊されているので,「より対称性の少ない」新しいデザインが作られる．いつものように，対称性は群によって測られる．この場合は，E_2 の適切な部分群で，与えられた模様をそれ自身へと送る平面の等長変換を元に持つものである．2 次元の繰り返し模様，あるいは私たちがこれらを今後呼ぶように，**壁紙模様** (wallpaper pattern) の対称性の群としてこのように現れ得る群を分類しよう．壁紙として正 6 角形がちょっと面白くないと思えば，図 25.3 に示されるデザインを試してみよう．両方ともに（陰影のない）正 6 角形の模様と全く同じ対称性を表している．

前章のすべてのアイディアと記号を受け入れることにする．特に，平面の各等長変換を順序付けられた組 $(\mathbf{v}, M)$ で表すことにする．ここで，$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, M \in O_2$ である．$g = (\mathbf{v}, M)$ ならば，すべての $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して，

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{v} + f_M(\mathbf{x}) = \mathbf{v} + \mathbf{x}M^t$$

であることを思い出そう．$\pi : E_2 \to O_2$ を $\pi(\mathbf{v}, M) = M$ によって定める．このとき，π は準同型写像になる．なぜならば，

$$\begin{aligned}
\pi((\mathbf{v}, M)(\mathbf{v}_1, M_1)) &= \pi(\mathbf{v} + f_M(\mathbf{v}_1), MM_1) \\
&= MM_1 \\
&= \pi((\mathbf{v}, M))\pi((\mathbf{v}_1, M_1))
\end{aligned}$$

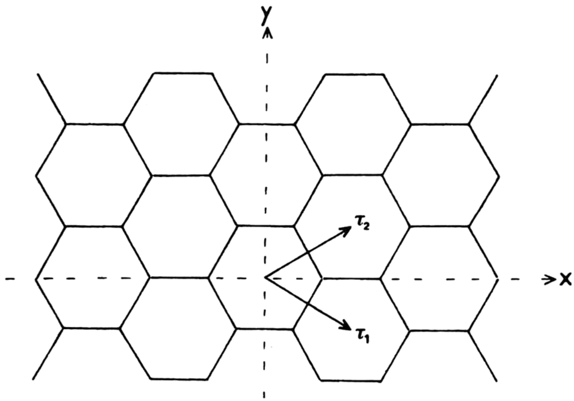


図 **25.1**

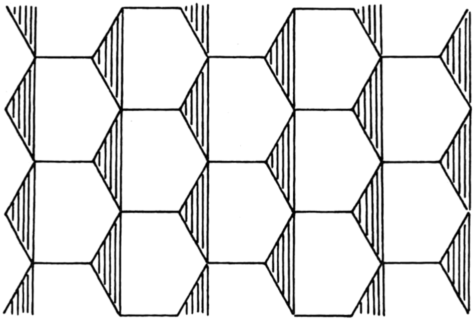


図 **25.2**

となるからである．この核は等長変換 $(\mathbf{v}, I), \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$，つまり，平行移動，からなる．$G$ が E_2 の部分群ならば，$G \cap T$ を H と書き，$\pi(G)$ を J と書く．H を G の**並進部分群** (translation subgroup)，J を G の**点群** (point group) と呼ぶ．正 6 角形の陰影のない模様の対称性の群については，H は平行移動 τ_1, τ_2 によって生成され，J は 2 つの行列

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

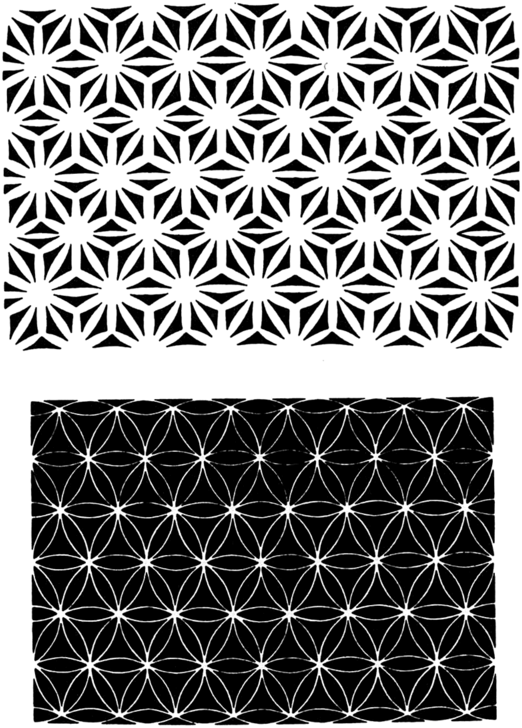


図 25.3

によって定められる O_2 の中の D_6 のコピーである．陰影の付いた場合は，H は同じままであるが，J は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

によって生成される位数2の O_2 の部分群に縮小される．π の G への制限は G から J への全射準同型写像で，その核が H となるものである．ゆえに，第一同型定理により，J は商群 G/H に同型である．

ここで，これから私たちが分類しようと思う群の正確な記述をする．

E_2 の部分群が**壁紙群** (wallpaper group) であるとは，その並進部分群が2

つの独立な平行移動によって生成され，その点群が有限であるときをいう．

分類は 26 章で実行される．まず最初に，壁紙群の並進部分群と点群についてもっと情報を集めることが必要である．

これから，G は並進部分群 H と点群 J を持つ壁紙群を表すことにする．L を $\mathbb{R}^2$ 上の H の作用による原点の軌道とする．集合 L は，H が 2 つの独立な平行移動によって生成されているのだから，確実に 2 つの独立なベクトルを含む．L の中で最小な長さを持つゼロでないベクトル $\mathbf{a}$ を 1 つ選び，L から 2 番目のベクトル $\mathbf{b}$ を，$\mathbf{a}$ とは斜めの位置にあり，その長さができる限り短いものを 1 つ選ぶ．

(25.1) 定理．集合 L は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ によって張られる**格子** (lattice) である．つまり，L は $m\mathbf{a}+n\mathbf{b}$ の形の線型結合すべてからなる．ここで，$m, n \in \mathbb{Z}$ である．

証明．対応 $(\mathbf{v}, I) \mapsto \mathbf{v}$ は T と，H を L へ送る加法群 $\mathbb{R}^2$ との間の同型写像である．ゆえに，L は $\mathbb{R}^2$ の部分群であり，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ によって張られる格子のすべての点 $m\mathbf{a}+n\mathbf{b}$ は L に属する．この格子の点を使えば，図 25.4 に描かれているような平行 4 辺形に平面を分割することができる．$\mathbf{x}$ が L に属すが，格子の点でないならば，$\mathbf{x}$ を含む平行 4 辺形を 1 つ選び，$\mathbf{x}$ にできる限り近いこの平行 4 辺形の頂点 $\mathbf{c}$ を選ぶ．このとき，ベクトル $\mathbf{x}-\mathbf{c}$ はゼロベクトルではなく，$\mathbf{a}$ とも $\mathbf{b}$ とも等しくなく，その長さは $\|\mathbf{b}\|$ よりも短い．しかし，$\mathbf{x}-\mathbf{c}$ は L に属する．なぜならば，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{c}$ はともに L に属するからである．$\|\mathbf{a}\|$ は L において最小な長さであると仮定されているので，$\|\mathbf{x}-\mathbf{c}\| < \|\mathbf{a}\|$ となり得ない．一方で，もし，$\|\mathbf{a}\| \le \|\mathbf{x}-\mathbf{c}\| < \|\mathbf{b}\|$ ならば，このとき，$\mathbf{x}-\mathbf{c}$ は $\mathbf{a}$ に対して斜めの位置にいなければならない．これは $\mathbf{b}$ の選び方に矛盾する．よって，このような点 $\mathbf{x}$ は存在し得ない．ゆえに，L は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ によって張られる格子である．□

ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ によって定められる基本的な平行 4 辺形の形に従って，格子を **5** つの異なる形に分類しよう．G の格子と G の点群の性質から，G 自身に関する情報を集める計画である．必要ならば $\mathbf{b}$ を $-\mathbf{b}$ に置き換えることにより，

$$\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| \le \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|$$

が保証される．この仮定の下で，異なる格子が次のように定義される．

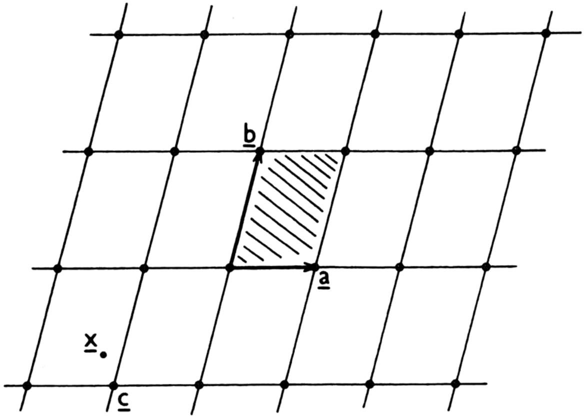


図 25.4

(a) 斜方形 $\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|$.
(b) 長方形 $\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|$.
(c) 有心長方形 $\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|$.
(d) 正方形 $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|$.
(e) 正 6 角形 $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|$.

図 25.5 を一目見れば，これらの名前が使われている理由がわかる．一見，

$$\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|$$

という可能性を忘れてしまったかのように見える．ここでは，基本的な平行 4 辺形はひし形である．ここで，ひし形の 2 本の対角線は互いに直角に交わるのであった．よって，ベクトル $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ と $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ に基づいた長方形である有心長方形の構造を持つことになる（図 25.6）．

（壁紙群は様々な別名で文献に現れる．最も知られているのは，「2 次元結晶群」である．**3 次元**において，類似の話を想像してみると，対応する格子は 3 つの独立なベクトルで張られ，**結晶**に見られる内部の原子の構造を模型化した点の配置を与える.）

点群 J は，まさにその定義により，O_2 の部分群である．しかしながら，G **の中には** J **のコピーは含まれないかもしれない．**平行移動 $\tau(x,y)=(x+1,y)$ と滑り反転 $h(x,y)=(-x,y+1)$ により生成される壁紙群を考えよう．滑り

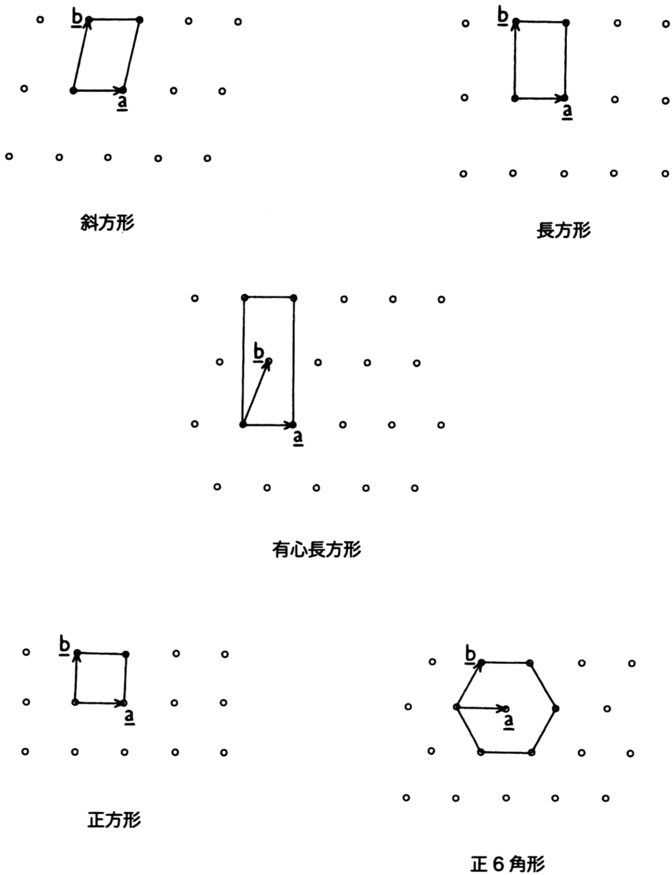


図 25.5

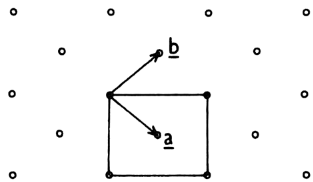


図 25.6

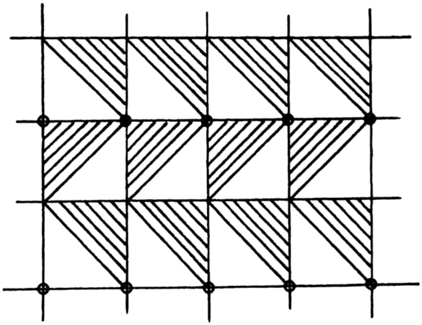


図 25.7

反転の直線は y-軸であり，これは平行移動の方向と垂直になる．この状況に合った模様が図 25.7 に示されている．ここで，点群は O_2 の部分群

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

である．しかしながら，群 G は，平行移動と滑り反転によりすべて構成されており，これらはすべて無限位数を持つ．ゆえに，G は J のコピーを含むことができない．滑り反転 h を 2 回施すと，平行移動 $(x, y) \to (x, y+2)$ を与える．この例における**格子**はベクトル $\mathbf{a} = (1,0), \mathbf{b} = (0,2)$ により張られる．G のすべての元がこの格子をそれ自身へと送るわけではないことに注意せよ．にもかかわらず，点群は格子を持つ．

(25.2) 定理． 点群 J は格子 L 上に作用する．

証明． 点群は，O_2 の部分群なので，通常の方法により，平面上に作用する．$M \in J, \mathbf{x} \in L$ のとき，$f_M(\mathbf{x})$ が L に属することを示さなければならない．

$\pi(g) = M$, $g = (\mathbf{v}, M)$ と仮定し，τ で平行移動 $(\mathbf{x}, I)$ を表すものとする．H は準同型写像 $\pi : G \to J$ の核なので，これは G の正規部分群である．ゆえに，$g\tau g^{-1}$ は H に属する．しかし，

$$\begin{aligned} g\tau g^{-1} &= (\mathbf{v}, M)(\mathbf{x}, I)(-f_M^{-1}(\mathbf{v}), M^{-1}) \\ &= (\mathbf{v}, M)(\mathbf{x} - f_M^{-1}(\mathbf{v}), M^{-1}) \\ &= (\mathbf{v} + f_M(\mathbf{x} - f_M^{-1}(\mathbf{v})), MM^{-1}) \\ &= (\mathbf{v} + f_M(\mathbf{x}) - \mathbf{v}, I) \\ &= (f_M(\mathbf{x}), I) \end{aligned}$$

となるので，結果，要求されていたように，$f_M(\mathbf{x})$ は格子 L の点である．□

(19.1) から，O_2 の有限部分群は巡回群か 2 面体群であったことを思い出そう．次の結果は，これらのどれが壁紙群の点群として実際に現れ得るかを教えてくれる．この結果はしばしば「結晶条件」と呼ばれる．

(25.3) 定理． 壁紙群における回転の位数は 2, 3, 4, 6 だけしか取り得ない．

証明． 点群は有限であるので，壁紙群 G のすべての回転は有限位数を持つ．位数 q の回転があるとき，この回転を何回か適切に施せば，反時計回りの $2\pi/q$ 回転となる．ゆえに，回転行列

$$A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{q}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{q}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) \end{pmatrix}$$

は J に属する．以前と同様に，$\mathbf{a}$ を，G の格子 L における最小の長さを持つゼロでないベクトルを表すのに用いる．ここで，J は L 上に作用しており，よって，$f_A(\mathbf{a})$ は L に属する．q が 6 よりも大きいとする．このとき，$2\pi/q$ は $60°$ よりも小さく，$f_A(\mathbf{a}) - \mathbf{a}$ は $\mathbf{a}$ よりも短い L のベクトルである（図 25.8）．これは，$\mathbf{a}$ の選び方に矛盾する．もし，q が 5 に等しいならば，$f_A^2(\mathbf{a})$ と $-\mathbf{a}$ の間の角度は，$36°$ である．今度は，$f_A^2(\mathbf{a}) + \mathbf{a}$ は L に属し，$\mathbf{a}$ よりも短い．再び矛盾を得た．□

(25.4) 系． 壁紙群の点群は，角度 0, π, $2\pi/3$, $\pi/2$, $\pi/3$ の中の 1 つによる回転と，ことによると，1 つの反転から生成される．

証明． これは直前の結果から直接従う．□

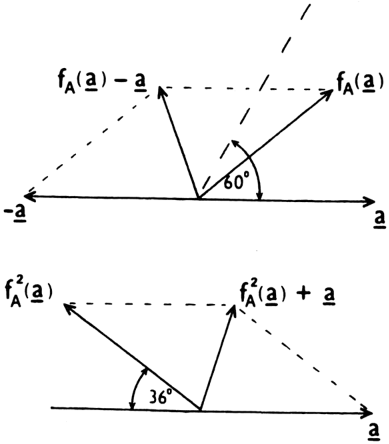


図 25.8

(25.5) 定理. 壁紙群の間の同型写像は，平行移動を平行移動へ，回転を回転へ，反転を反転へ，滑り反転を滑り反転へと写す.

証明. $\varphi : G \to G_1$ を壁紙群の間の同型写像とし，τ を G における平行移動とする．平行移動と滑り反転は無限位数を持つ一方で，回転と反転は有限位数を持つ．ゆえに，$\varphi(\tau)$ は平行移動か滑り反転のいずれかでなければならない．$\varphi(\tau)$ が滑り反転であると仮定し，G_1 から $\varphi(\tau)$ とは交換しない平行移動 τ_1 を 1 つ選ぶ.（滑り反転の直線に平行でないどのような平行移動もこのようにできる.）もし，$\varphi(g) = \tau_1$ ならば，このとき，g は平行移動か滑り反転でなければならない．よって，g^2 は平行移動であり，ゆえに，τ と交換する．これは，$\varphi(g^2) = \tau_1^2$ が $\varphi(\tau)$ と交換しないという事実に矛盾する．したがって，平行移動は平行移動に，滑り反転は滑り反転に対応する.

反転は位数 2 を持ち，結果として，同型写像の下での反転の像は反転か半回転のいずれかである．$g \in G$ を像 $\varphi(g)$ が半回転である反転とし，G から，g の鏡に垂直でない方向に，平行移動 τ を選ぶ．このとき，τg は滑り反転である．しかし，$\varphi(\tau g) = \varphi(\tau)\varphi(g)$ は平行移動と半回転の合成であるので，これは別の半回転である．よって，矛盾を得た．反転は反転に対応しなければならない．最後に，今や，回転は回転に対応せざるを得ない． □

(25.6) 系．2つの壁紙群が同型ならば，それらの点群もまた同型である．

証明．壁紙群 G, G_1 が並進部分群 H, H_1 と点群 J, J_1 をそれぞれ持つとする．$\varphi : G \to G_1$ が同型写像ならば，(25.5) により，$\varphi(H) = H_1$ を得る．それゆえ，φ は G/H から G_1/H_1 への同型写像を誘導する．これで結果が従う．というのも，J は G/H に同型であり，J_1 は G_1/H_1 に同型だからである．□

演習問題

25.1. 次のうちのどれが壁紙群であるか？

(i) 滑り反転 $g(x, y) = (-x, y+1)$ と $h(x, y) = (-x+2, y+1)$ によって生成される E_2 の部分群．

(ii) 平行移動 $\tau(x, y) = (x+1, y)$ と y-軸に対する反転によって生成される E_2 の部分群．

(iii) x-軸に対する反転と点 $(0, 1)$ を中心とする反時計回りの $2\pi/3$ 回転によって生成される E_2 の部分群．

(iv) x-軸に対する反転，y-軸に対する反転，直線 $x + y = 1$ に対する反転によって生成される E_2 の部分群．

25.2. 次のベクトルの組によって張られる格子の図の概形を描き，各場合について，どの形の格子を得たかを述べよ．

(i) $\mathbf{a} = (-1, -\sqrt{3})$, $\mathbf{b} = (1, -\sqrt{3})$.

(ii) $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = (2, -4)$.

(iii) $\mathbf{a} = (-2, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, 3)$.

25.3. m を格子 L の2点を通る直線とする．m は無限に多くの L の点を含むことを証明せよ．

25.4. L_1 と L_2 が格子ならば，$\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} \in L_1, \mathbf{y} \in L_2$ の形の点の集まりもまた格子であることを示せ．

25.5. 半回転の後に平行移動を施した結果は何であるか？

25.6. 反転によって固定される直線はその鏡 (mirror) と呼ばれる．2つの反転が交換するための必要十分条件は，それらの鏡が一致するか，互いに垂直であるかのいずれかであることを示せ．

25.7. 半回転が反転と交換するための必要十分条件は，半回転の中心が反転の鏡の上にあることであることを証明せよ．

25.8. 平行移動 τ が反転 g と交換するための必要十分条件は，τ が g の鏡をそれ自身へ送ることであることを示せ．

25.9. τ を $\mathbf{v}$ による平行移動とし，g を直線 m に対する反転とする．もし，$\mathbf{v}$ が

m に垂直であるならば，$g\tau$ は反転であり，そうでなければ，滑り反転であることを証明せよ．

25.10. 水平な方向に対して，正方形を 45 度傾けることにより，有心長方形の構造が作られることを示せ．正 6 角格子に有心長方形の構造を与える異なる方法は何通りあるか？

25.11. L をベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ によって張られる格子とし，f を L を保つ回転とする．$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を $\mathbb{R}^2$ の基底として取れば，f の行列表示は整数を成分に持つ．特に，そのトレースの値は整数である．トレースは基底の変換に対して不変であるという事実を用いて，定理 25.3 の 2 番目の証明を与えよ．

25.12. 点群がクラインの群と同型であるような壁紙群の例と，点群が位数 3 の巡回群である場合の壁紙群の例を挙げよ．

25.13. G を正方格子を持つ壁紙群とする．G の点群としてどれだけ可能なものがあるか？

25.14. 前問において，今度は，正 6 角格子としたらどうなるか？

第26章　壁紙の模様

17 個の異なる壁紙群が存在する．その理由を知るために，格子の5つの取り得る形の各々について順番に調べるとしよう．格子 L が与えられたとき，まず最初に，どの直交変換が L を保つかを求める．このような変換は，群をなす．そして，(25.2) により，L をその格子として持つどのような壁紙群の点群もこの群の部分群でなければならない．ここで，点群に関するこの制限は私たちが格子 L を持つ異なる壁紙群を列挙するのに十分である．すべての場合の網羅的な解析はあまりにも多くの紙面を取ることになる．そこで，いくつかの例に注意を集中させて，残りの計算を演習問題へとまわそう．私たちが見つけるすべての群は真に異なるものである．言い換えれば，どの2つも同型ではない，ということがこの章の終わりに示されることになる．

分類を始める前に，記号について少しだけ言葉を加える．各壁紙群はいくつかの（国際的に認知されている）記号 p, c, m, g と整数 1, 2, 3, 4, 6 からなる名称を持つ．文字 p は格子を表し，**原始的** (primitive) という語を意味する．格子を原始的な領域（内部に格子点を全く含まない基本的な平行4辺形のコピー）から構成されるものとして見るとき，これを原始的格子と呼ぶ．1つの場合（有心長方形の格子）には，基本的な平行4辺形としてその中心を含めた非原始的な領域を取る．結果として得られる**有心格子** (centered lattice) を文字 c を使って表す．反転に対する記号は m（**鏡** (mirror)）であり，g は**滑り反転** (glide reflection) を表す．最後に，1 は恒等変換のために使われ，数 2, 3, 4, 6 は対応する位数の回転を示している．位数2の回転は通常**半回転**と呼ばれる．

17 個の群は図 26.1 と図 26.2 に描かれている．回転の中心と，基本的な平行4辺形に対する，鏡と滑り反転の直線の位置が図に示されている．記号○，▲，□，●は対応する点の固定部分群が位数 2, 3, 4, 6 の巡回群であること

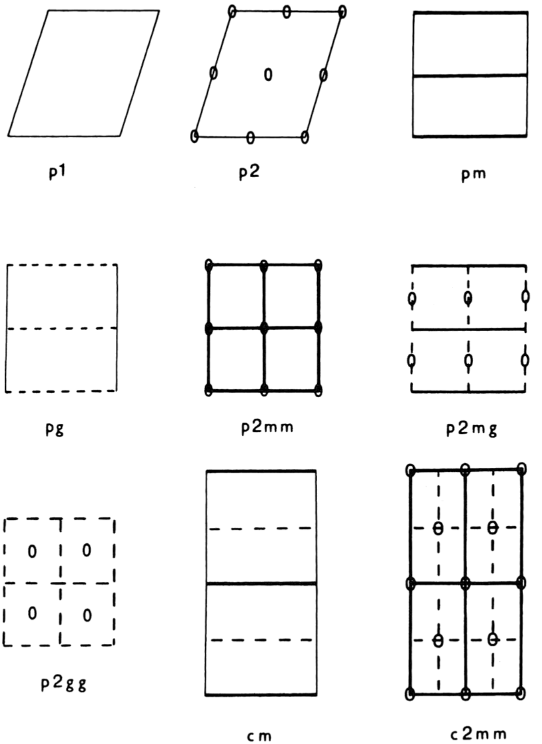


図 **26.1**

をそれぞれ意味する．鏡は太線で描かれ，滑り反転の直線は破線で示されている．

ここで，各場合に応じた解析に進むことにしよう．いつものように，G は並進部分群 H と点群 J を持つ壁紙群で，L は格子である．格子を張るベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は 25 章にあるように選ばれている．$\mathbf{a}$ が正の x-軸上にあり，$\mathbf{b}$ は第 1 象限にあると仮定しても何の問題もない．最後に，A_θ は，原点を中心とする反時計回りの θ 回転を表す行列であり，一方，B_φ は正の x-軸から見て角度 $\varphi/2$ 傾いている原点を通る直線に対する反転を表す行列である．

場合 (a)．G の格子が斜方形 (oblique) である．このとき，L を保つ直交変

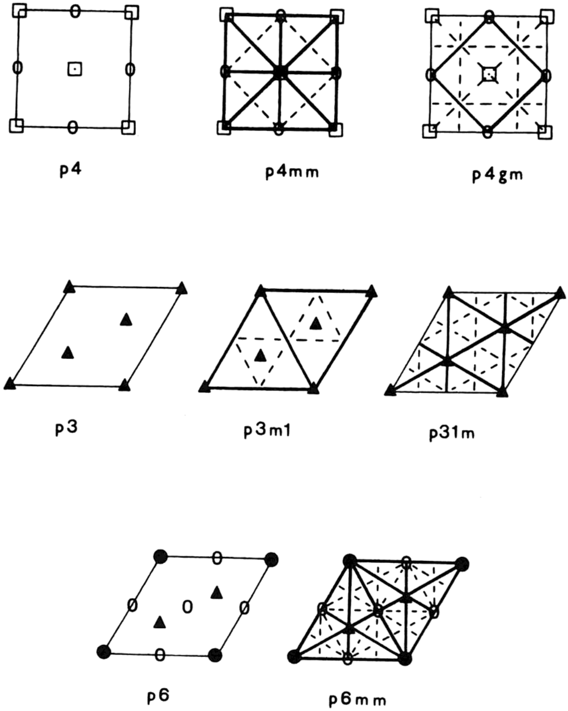


図 **26.2**

換は，恒等変換と原点を中心とする角度 π の回転だけである．ゆえに，G の点群は $\{\pm I\}$ の部分群である．

> **(p1)** もし J が単位行列のみを含むならば，このとき，G はすべての壁紙群の中で最も簡単なものとなる．つまり，2 つの独立な平行移動によって生成される群である．その元は $m\mathbf{a}+n\mathbf{b}, m, n \in \mathbb{Z}$ の形を持つ．
>
> **(p2)** ここでは，J は $\{\pm I\}$ である．ゆえに，G は**半回転**を含む．この半回転によって固定される点を原点として取ってもよいので，$(\mathbf{0},-I)$ は G に属する．2 つの右剰余類 H と $H(\mathbf{0},-I)$ の和集合は E_2 の部分群であり，これは群 G でなければならない．平行移動でない G の元

は $H(\mathbf{0},-I)$ に属し，次の形を持つ．

$$(m\mathbf{a}+n\mathbf{b},I)(\mathbf{0},-I)=(m\mathbf{a}+n\mathbf{b},-I).$$

ここで，$m,n\in\mathbb{Z}$ である．言い換えれば，点 $\frac{1}{2}m\mathbf{a}+\frac{1}{2}n\mathbf{b}$ を中心とする半回転全体を持つ．□

場合 (b)．G の格子が**長方形** (rectangular) である．今度は，L を保つ 4 つの直交変換がある．つまり，恒等変換，$\mathbf{0}$ を中心とする半回転，x-軸に対する反転，y-軸に対する反転である．ゆえに，G の点群は $\{I,-I,B_0,B_\pi\}$ の部分群である．上で見つけられた可能性 p1, p2 を無視して，**これまでに見ていない壁紙群を探す．**

(pm) J は $\{I,B_0\}$ であり，G は水平な鏡に対する**反転**を含む．

(pg) J が $\{I,B_0\}$ で，G の中には反転はないと仮定する．このとき，G は参照する直線が水平である**滑り**反転を含まなければならない．原点としてこの直線上の点を選ぶ．滑り反転を 2 回施すと平行移動を与えるから，今の場合の滑り反転はある整数 k に対して，$(\frac{1}{2}k\mathbf{a},B_0)$ の形を持つ．もし k が偶数ならば，このとき，$(-\frac{1}{2}k\mathbf{a},I)$ は G における平行移動であり，反転

$$(\mathbf{0},B_0)=(-\tfrac{1}{2}k\mathbf{a},I)(\tfrac{1}{2}k\mathbf{a},B_0)$$

は G に属する．これは最初の仮定に矛盾する．ゆえに，k は**奇数**であり，

$$(\tfrac{1}{2}\mathbf{a},B_0)=(-\tfrac{1}{2}(k-1)\mathbf{a},I)(\tfrac{1}{2}k\mathbf{a},B_0)$$

は G に属する．平行移動でない G の元は次の形を持つ．

$$(m\mathbf{a}+n\mathbf{b},I)(\tfrac{1}{2}\mathbf{a},B_0)=((m+\tfrac{1}{2})\mathbf{a}+n\mathbf{b},B_0).$$

ここで，$m,n\in\mathbb{Z}$ である．これらはすべて，格子の点を通るか格子点の間にあるかのいずれかとなる水平線に沿った，滑り反転である．各滑りの長さは $\frac{1}{2}\mathbf{a}$ の長さの奇数倍である．

点群として $\{I,B_0\}$ の代わりに $\{I,B_\pi\}$ を取ることは，直前の議論で「水平」と「垂直」の役割を入れ替えることに等しいので，何も新しいことは導かれない．**今から点群は $\{I,-I,B_0,B_\pi\}$ 全体であると仮定する．** G の中の反転によって，B_0,B_π の，両方とも実現される，どちらか 1 つだけ実現される，どちらも実現されない，という 3 つの

可能性がある．

(p2mm) この場合，G は水平な鏡に対する反転と垂直な鏡に対する反転を含む．

(p2mg) G が水平な鏡に対する反転を含むが垂直な鏡に対する反転を含まないとする．このとき，B_π は垂直な滑り反転により G の中に実現されなければならない．水平な鏡と垂直な滑り反転の直線の交点というまい具合に原点を選び，それに加えて pg で使われた議論を合わせると，$(\mathbf{0}, B_0)$ と $(\frac{1}{2}\mathbf{b}, B_\pi)$ は G に属するとしてよい．積

$$(\tfrac{1}{2}\mathbf{b}, B_\pi)(\mathbf{0}, B_0) = (\tfrac{1}{2}\mathbf{b}, -I)$$

は $\frac{1}{4}\mathbf{b}$ を中心とする半回転である．右剰余類は，

$$H, H(\mathbf{0}, B_0), H(\tfrac{1}{2}\mathbf{b}, B_\pi), H(\tfrac{1}{2}\mathbf{b}, -I)$$

であり，G を埋め尽くす．これらの剰余類の最初のもので，平行移動を得る．2 番目の剰余類の典型的な元は

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(\mathbf{0}, B_0) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_0)$$

の形を持つ．ここで，$m, n \in \mathbb{Z}$ である．$m = 0$ であるとき，この等長変換は，格子の点を通るか格子点の間にあるかのいずれかとなる水平な鏡に対する反転である．もし，m がゼロでなければ，鏡は滑り反転の直線に変わり，滑り反転の平行移動部分は $m\mathbf{a}$ となる．3 番目の剰余類は元

$$(m\mathbf{a} + (n + \tfrac{1}{2})\mathbf{b}, B_\pi)$$

を含み，これらはすべて，格子の点を通るか格子点の間にあるかのいずれかとなる垂直な滑り反転である．これらの各滑り反転の平行移動部分は $\frac{1}{2}\mathbf{b}$ の奇数倍である．最後に，$H(\frac{1}{2}\mathbf{b}, -I)$ は点 $\frac{1}{2}m\mathbf{a} + \frac{1}{2}(n + \frac{1}{2})\mathbf{b}$ を中心とする半回転からなる．

前の議論において，水平と垂直を入れ替えれば，この場合の壁紙群は p2mg の群と同型になることが導かれる．

(p2gg) ここでは G の中には反転はない． □

場合 (c)．G の格子が**有心長方形** (centered rectangular) である．L を保つ直交変換は長方形の場合と同じである．よって，点群は再び $\{I, -I, B_0, B_\pi\}$ の部分群でなければならない．2 つの新しい群を発見することになる．

(cm) J が $\{I, B_0\}$ であるとし，$(\mathbf{v}, B_0)$ が G の中で B_0 を実現しているとする．この等長変換は水平な鏡に対する反転であるか，水平線に沿った滑り反転のいずれかである．鏡あるいは滑り反転の直線の上に原点として 1 点を選ぶ．すると，$2\mathbf{v}$ は $\mathbf{a}$ の何倍かになる．垂直方向はベクトル $2\mathbf{b} - \mathbf{a}$ により定められることを思い出そう．
(i) $2\mathbf{v} = k\mathbf{a}$ で，k が**偶数**のとき，**反転**

$$(\mathbf{0}, B_0) = (-\tfrac{1}{2}k\mathbf{a}, I)(\tfrac{1}{2}k\mathbf{a}, B_0)$$

は G に属する．G の元で平行移動でないものは次の形を持つ．

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_0) = ((m + \tfrac{1}{2}n)\mathbf{a} + \tfrac{1}{2}n(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), B_0).$$

ここで，$m, n \in \mathbb{Z}$ である．n を偶数に取り，$m = -\frac{1}{2}n$ と取ることにより，格子点を通る水平な鏡に対するすべての反転が作られる．もし n が偶数であるが，$m \neq -\frac{1}{2}n$ のときは，これらの鏡は滑り反転の直線に変わり，各滑り反転の平行移動部分は $\mathbf{a}$ の何倍かになる．最後に，もし n が奇数ならば，格子点の間を通る直線に沿った滑り反転を得る．これらの各滑り反転の平行移動部分は $\frac{1}{2}\mathbf{a}$ の奇数倍である．
(ii) k が**奇数**ならば，このとき，

$$(\tfrac{1}{2}(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), B_0) = (-\tfrac{1}{2}(k+1)\mathbf{a} + \mathbf{b}, I)(\tfrac{1}{2}k\mathbf{a}, B_0)$$

は G に属する．これは**再び反転**であり，原点をその鏡上に移動させれば，前の場合に帰着することが導かれる．

点群 $\{I, B_0\}$ を $\{I, B_\pi\}$ に置き換えることは，cm に同型な群を導く．

(c2mm) J は $\{I, -I, B_0, B_\pi\}$ である．上に実行したものと類似の計算により，B_0 と B_π の両方ともが G の中で反転により実現することができる．　□

場合 (d)．G の格子が**正方形** (square) である．このとき，L を保つ直交変換の群は，$A_{\frac{\pi}{2}}$ と B_0 によって生成される位数 8 の 2 面体群である．点群 J はこの群の部分群であり，何か新しいものを得るためには，J の中に $A_{\frac{\pi}{2}}$ を含まなければならない．(残りの場合は，演習問題 26.9 で扱われる.)

(p4) ここでは，J は $A_{\frac{\pi}{2}}$ によって生成される．
(p4mm) J は $A_{\frac{\pi}{2}}$ と B_0 によって生成され，B_0 は G の中の**反転**によ

り実現することができる．

(p4gm) J は $A_{\frac{\pi}{2}}$ と B_0 によって生成されるが，B_0 は G の中の反転では実現することができない，とする．位数 4 の回転によって固定される点を原点として選べば，$(\mathbf{0}, A_{\frac{\pi}{2}})$ は G に属する．また，$(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}, B_0)$ は G の中で B_0 を実現するものとする．$(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}, B_0)$ を 2 乗すると，$(2\lambda\mathbf{a}, I)$ を得る．よって，2λ は整数である．もし 2λ が偶数ならば，反転

$$(\mu\mathbf{b}, B_0) = (-\lambda\mathbf{a}, I)(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}, B_0)$$

は G に属することになり，矛盾を得る．したがって，2λ は奇数でなければならない．そして，

$$(\tfrac{1}{2}\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}, B_0) = ((\tfrac{1}{2}-\lambda)\mathbf{a}, I)(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}, B_0)$$

は G の元である．また，

$$(\mathbf{0}, A_{\frac{\pi}{2}})(\tfrac{1}{2}\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}, B_0) = (\tfrac{1}{2}\mathbf{b}-\mu\mathbf{a}, B_{\frac{\pi}{2}}),$$
$$(\tfrac{1}{2}\mathbf{b}-\mu\mathbf{a}, B_{\frac{\pi}{2}})^2 = ((\tfrac{1}{2}-\mu)(\mathbf{a}+\mathbf{b}), I)$$

から，$\frac{1}{2}-\mu$ は整数である．滑り反転

$$(\tfrac{1}{2}\mathbf{a}+\tfrac{1}{2}\mathbf{b}, B_0) = ((\tfrac{1}{2}-\mu)\mathbf{b}, I)(\tfrac{1}{2}\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}, B_0)$$

は G に属すると結論付けることができる．右剰余類

$$\begin{array}{ll} H(\mathbf{0}, I), & H(\mathbf{0}, A_{\frac{\pi}{2}}), \\ H(\mathbf{0}, -I), & H(\mathbf{0}, A_{\frac{3\pi}{2}}), \\ H(\tfrac{1}{2}\mathbf{a}+\tfrac{1}{2}\mathbf{b}, B_0), & H(\tfrac{1}{2}\mathbf{a}+\tfrac{1}{2}\mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{2}}), \\ H(\tfrac{1}{2}\mathbf{a}+\tfrac{1}{2}\mathbf{b}, B_\pi), & H(\tfrac{1}{2}\mathbf{a}+\tfrac{1}{2}\mathbf{b}, B_{\frac{3\pi}{2}}) \end{array}$$

は G を埋め尽くし，図形的にもこれらの元を認識することは容易である．例えば，$H(\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{2}})$ の典型的な元は次の形を持つ．

$$\begin{aligned} &((m+\tfrac{1}{2})\mathbf{a}+(n+\tfrac{1}{2}\mathbf{b}), B_{\frac{\pi}{2}}) \\ &\quad = (\tfrac{1}{2}(m+n+1)(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\tfrac{1}{2}(m-n)(\mathbf{a}-\mathbf{b}), B_{\frac{\pi}{2}}). \end{aligned}$$

ここで，$m, n \in \mathbb{Z}$ である．$m+n+1 = 0$ と取れば，格子点の間を通る水平線に対して 45° 傾いた鏡に対するすべての反転を与える．$m+n+1$ がゼロでなく，$m-n$ が奇数であれば，これらの鏡は滑り反

転の直線に変わる．最後に，$m+n+1$ がゼロでなく，$m-n$ が偶数のとき，格子点を通る傾き 1 の直線に沿った滑り反転を得る．一方，剰余類 $H(\mathbf{0},-I)$ は，点 $\frac{1}{2}m\mathbf{a}+\frac{1}{2}n\mathbf{b}$ を中心とする半回転 $(m\mathbf{a}+n\mathbf{b},-I)$ のすべてを含む．残りの場合については読者に委ねる． □

場合 (e)．G の格子が**正 6 角形** (hexagonal) である．このとき，点群は $A_{\frac{\pi}{3}}$ と B_0 によって生成される位数12 の 2 面体群に含まれなければならない．J が位数 3 または 6 の回転を含むとき，新しい壁紙群が導かれる．(残りの場合は，演習問題 26.10 で扱われる．)

(p3) J は $A_{\frac{2\pi}{3}}$ によって生成される．
(p3m1) J は $A_{\frac{2\pi}{3}}$ と B_0 によって生成される．
(p31m) J は $A_{\frac{2\pi}{3}}$ と $B_{\frac{\pi}{3}}$ によって生成される．位数 3 の回転によって固定される点を原点として選べば，$(\mathbf{0},A_{\frac{2\pi}{3}})$ は G に属する．また，$(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b},B_{\frac{\pi}{3}})$ は G の中で $B_{\frac{\pi}{3}}$ を実現するものとする．ここで，

$$(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b},B_{\frac{\pi}{3}})^2=((\lambda+\mu)(\mathbf{a}+\mathbf{b}),I)$$

を得る．よって，$\lambda+\mu$ は整数である．また，

$$(\mathbf{0},A_{\frac{2\pi}{3}})(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b},B_{\frac{\pi}{3}})=(\lambda(\mathbf{b}-\mathbf{a})-\mu\mathbf{a},B_\pi),$$

$$(\lambda(\mathbf{b}-\mu\mathbf{a})-\mu\mathbf{a},B_\pi)^2=(\lambda(2\mathbf{b}-\mathbf{a}),I)$$

から，λ は整数である．よって，λ と μ の両方とも整数であり，**反転**

$$(\mathbf{0},B_{\frac{\pi}{3}})=(-\lambda\mathbf{a}-\mu\mathbf{b},I)(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b},B_{\frac{\pi}{3}})$$

は G に属する．G の元は，$(m\mathbf{a}+n\mathbf{b},M)$ の形をしている．ここで，$m,n\in\mathbb{Z}$ であり，M は行列 $I,A_{\frac{2\pi}{3}},A_{\frac{4\pi}{3}},B_{\frac{\pi}{3}},B_\pi,B_{\frac{5\pi}{3}}$ のどれかである．これらの元を図形的に解釈することを読者に求める．例えば，

$$(m\mathbf{a}+n\mathbf{b},B_\pi)=((m+\tfrac{1}{2}n)\mathbf{a}+\tfrac{1}{2}n(2\mathbf{b}-\mathbf{a}),B_\pi)$$

は $n=0$ のとき垂直な鏡に対する反転であり，そうでなければ，垂直方向への滑り反転である．
(p6) J は $A_{\frac{\pi}{3}}$ によって生成される．
(p6mm) J は $A_{\frac{\pi}{3}}$ と B_0 によって生成される． □

これら 17 の群はすべて全く異なるものなのか？ 答えは，そのとおり，で

ある．以下，それを見ていくことにしよう．(25.6) により，点群が同型となる壁紙群だけを調べればよい．よって，点群のまとめから始めよう．

G	J	G	J
p1	自明	p4	$\mathbb{Z}_4$
p2	$\mathbb{Z}_2$	p4mm	D_4
pm	$\mathbb{Z}_2$	p4gm	D_4
pg	$\mathbb{Z}_2$	p3	$\mathbb{Z}_3$
p2mm	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	p3ml	D_3
p2mg	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	p3lm	D_3
p2gg	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	p6	$\mathbb{Z}_6$
cm	$\mathbb{Z}_2$	p6mm	D_6
c2mm	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$		

壁紙群の間の同型写像は，平行移動を平行移動へ，回転を回転へ，反転を反転へ，滑り反転を滑り反転へと送ることを思い出そう．

(26.1) 定理． p2, pm, pg, cm のどの 2 つも同型ではない．

証明． これらの中で，p2 だけが回転を含む．よって，これは他のどれとも同型にはなり得ない．残りの 3 つの群の中で，pg は反転を含まない唯一のものである．結果として，pg は pm とも cm とも同型ではない．最後に，pm の中の滑り反転を取り，それを反転に続けて平行移動したものとして書くと，その反転と平行移動の両方ともに **pm に属する**ことに注意しよう．しかしながら，cm はその構成成分が cm に属さないような滑り反転を含む．例えば，次の滑り反転考えてみよう．

$$(\tfrac{1}{2}\mathbf{a} + \tfrac{1}{2}(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), B_0) = (\tfrac{1}{2}\mathbf{a}, I)(\tfrac{1}{2}(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), B_0).$$

よって，pm は cm と同型ではない． □

(26.2) 定理． p2mm, p2mg, p2gg, c2mm のどの 2 つも同型ではない．

証明． これらの中で，p2gg だけが反転を含まない．よって，これは他のどれとも同型にはなり得ない．残りの 3 つの群の中で，p2mm だけが滑り反転を各構成成分に含む．結果として，p2mm は p2mg とも c2mm とも同型ではない．最後に，p2mg に含まれるすべての反転の鏡は**水平**であることに注意しよう．よって，2 つの反転の積は常に平行移動になる．しかし，c2mm に

おいては，水平な鏡を持つ反転と垂直な鏡を持つ反転が存在する．各場合における積は半回転となる．ゆえに，p2mg は c2mm と同型ではない．　□

(26.3) 定理． p4mm は p4gm に同型ではない．

証明． p4mm の中で，位数 4 の各回転はともに p4mm に属する 2 つの反転の積として書くことができる．p4gm に対して，対応する主張は正しくない．例えば，$(\mathbf{a}, A_{\frac{\pi}{2}})$ は p4gm の中では 2 つの反転の積として分解することができない（演習問題 26.4 を見よ）．ゆえに，p4mm は p4gm に同型ではない．　□

(26.4) 定理． p3ml は p3lm に同型ではない．

証明． p3lm の中で，位数 3 の各回転は 2 つの反転の積として書くことができるが，p3ml の場合はこのようにならない．例えば，$(\mathbf{a}, A_{\frac{2\pi}{3}})$ は，p3ml の中では 2 つの反転の積として分解することができない（演習問題 26.5 を見よ）．ゆえに，p3lm は p3ml に同型ではない．　□

これで私たちの壁紙群の分類は完成した．私たちは「実用的な」アプローチを採用したが，わざとそうしたのだが，これらの群の**元**を求めるだけで，実際，これらの構造についてどのような理解も得られるのである．図 26.3 は 17 個の群のいくつかを実現しているいくつかの異なる文化による模様の例を示している．3 次元の場合は，結晶学者にとって興味のあることであるが，より複雑である．3 次元では，結晶群の 219 個の同型類が存在する．

演習問題

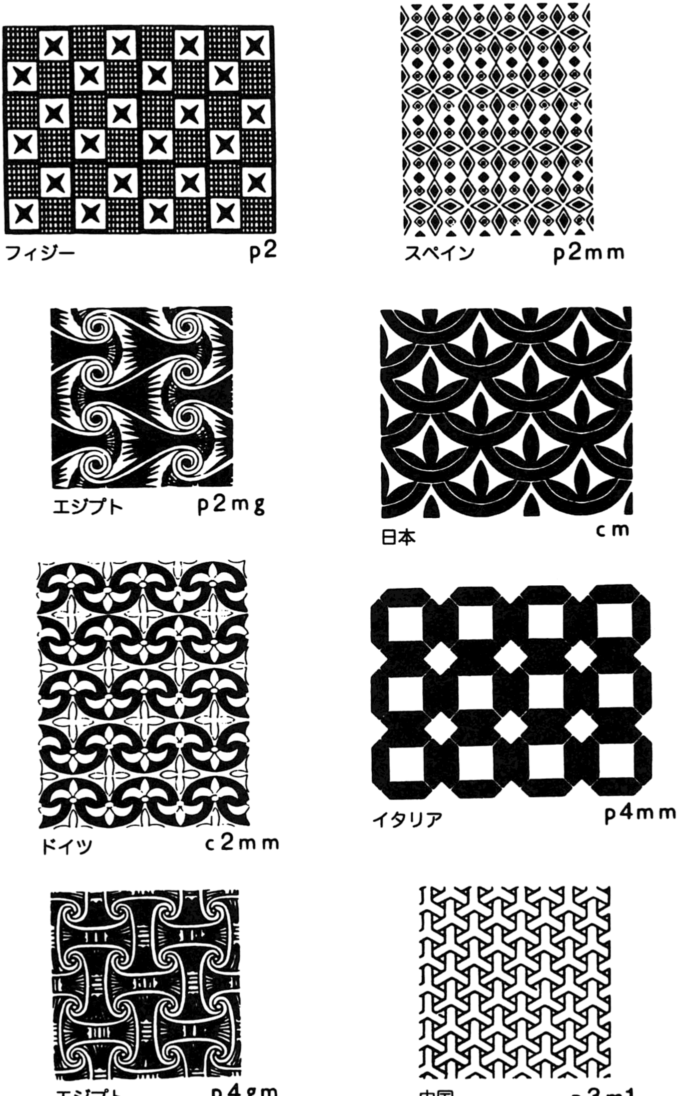
26.1. 壁紙群 c2mm, p4mm, p3ml の各々の元を記述し，これらの群が図 26.1，図 26.2 の対応する部分に表されていることを確かめよ．

26.2. 同様に図 26.3 の模様の各々についても調べ，壁紙群を求めよ．自分の答えと図に与えられているものとを比べよ．

26.3. p2mg の中の滑り反転で，その構成成分が p2mg に属さないものを見つけよ．同じことを c2mm に対しても行え．

26.4. $(\mathbf{a}, A_{\frac{\pi}{2}})$ は p4gm の中では 2 つの反転の積として分解することができないことを証明せよ．

26.5. $(\mathbf{a}, A_{\frac{2\pi}{3}})$ は p3ml の中では 2 つの反転の積として分解することができないことを示せ．



フィジー p2
スペイン p2mm
エジプト p2mg
日本 cm
ドイツ c2mm
イタリア p4mm
エジプト p4gm
中国 p3m1

図 26.3

26.6. 無限に長い帯に沿って規則的な方法で繰り返される模様は装飾帯 (frieze) と呼ばれる．このような模様の対称性のなす群は，並進部分群が無限巡回群であるという条件によって特徴付けられる．帯は $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq y \leq 1\}$ であると想定してよい．また模様を保つ最小の平行移動は $\tau(x,y) = (x+1,y)$ であると仮定してよい．装飾帯の模様は（原点を適切に選べば）7 つの可能な群を与えることを示せ．つまり，次の生成元を持つものである．

(i) τ.
(ii) 滑り反転 $g(x,y) = (x+\frac{1}{2}, -y)$.
(iii) τ と回転 $f(x,y) = (-x,-y)$.
(iv) τ と反転 $q(x,y) = (-x,y)$.
(v) τ と反転 fq.
(vi) τ, f, q.
(vii) g と f.

これらの群を実現する模様を発明せよ．

26.7. 前問の群 (i) と (ii) は，異なる型の対称性を表しているものの，ともに無限巡回群であることに注意しよう．7 つの「装飾帯群」を同型類にまとめよ．2 つの装飾帯群は，それらが平行移動を平行移動へ，回転を回転へ，反転を反転へ，滑り反転を滑り反転へ送る同型写像を経て同型となるとき，同値と考えられるべきである．私たちのリストにある群のどの 2 つも同値ではないことを証明せよ．

26.8. 装飾帯群の点群は，自明，位数 2 の巡回群，クラインの群に同型な群のどれかであることを示せ．

26.9. G を正方格子を持つ壁紙群で，その点群は

$$\{I, A_{\frac{\pi}{2}}, -I, A_{\frac{3\pi}{2}}, B_0, B_{\frac{\pi}{2}}, B_\pi, B_{\frac{3\pi}{2}}\}$$

の部分群であるものとする．点群が位数 4 の回転を含まないとき，次の表はすべての可能性を表していることを示せ．

点群 J	壁紙群 G
$\{I\}$	p1
$\{\pm I\}$	p2
$\{I, B_0\}$	pm または pg
$\{I, B_\pi\}$	pm または pg
$\{I, -I, B_0, B_\pi\}$	p2mm, p2mg または p2gg
$\{I, B_{\frac{\pi}{2}}\}$	cm
$\{I, B_{\frac{3\pi}{2}}\}$	cm
$\{I, -I, B_{\frac{\pi}{2}}, B_{\frac{3\pi}{2}}\}$	c2mm

最後の 3 つの場合に関しては，格子を水平方向から 45 度傾けてみるとよい．

26.10. G を正 6 角格子を持つ壁紙群で，その点群は $A_{\frac{\pi}{3}}$ と B_0 によって生成され

る 2 面体群の部分群であるとする．点群が位数 3 の回転を含まないとき，次の表はすべての可能性を表していることを示せ．

点群 J	壁紙群 G
$\{I\}$	p1
$\{\pm I\}$	p2
$\{I, B_{\frac{k\pi}{3}}\},\ 0 \leq k \leq 5$	cm
$\{I, -I, B_0, B_\pi\}$	c2mm
$\{I, -I, B_{\frac{\pi}{3}}, B_{\frac{4\pi}{3}}\}$	c2mm
$\{I, -I, B_{\frac{2\pi}{3}}, B_{\frac{5\pi}{3}}\}$	c2mm

まず演習問題 25.10 に取り組んだ方がよいだろう．

第 27 章　自由群と表示

群を生成元の集合と「関係式」の集合とで記述することができるのはしばしば便利である．例えば，2 面体群 D_n は 2 つの生成元 r と s によって定められ，これらは関係式 $r^n = e, s^2 = e, sr = r^{-1}s$，あるいは同値であるが，$r^n = s^2 = (rs)^2 = e$ を満たす．この群のすべての元を r と s の積として書くことができて，乗法表は与えられた関係式によって完全に決められるのではないかと想像する．これを正確なものとするために，自由群の概念を導入しよう．

与えられた群に対する**生成元の自由集合** (free set of generators) というアイディアを使うと，おそらく最も理解しやすいだろう．群 G の部分集合 X は，すべての $g \in G - \{e\}$ が有限の長さの積

$$g = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k} \tag{$*$}$$

の形に**唯一通り**に表すことができるとき，G に対する生成元の自由集合と呼ばれる．ここで，x_i は X に属し，x_i は決して x_{i+1} と等しくなることはなく，各 n_i はゼロでない整数である．私たちがこの生成元の集合を自由と呼ぶのは，$(*)$ の一意性により，これらの元の間には全く関係が存在し得ないからである．G が生成元の自由集合を持つとき，それは**自由群** (free group) と呼ばれる．

空でない集合 X が与えられたとき，X を生成元の自由集合として持つ群を以下のようにして構成することができる．集合 X における**語** (word) を，各 x_i が X に属し，m_i がすべて整数であるような有限個の積

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_s^{m_s}$$

と定める．そして，x_i が決して x_{i+1} に等しくなることがなく，m_i のすべてがゼロでないとき，語は**簡約された** (reduced) という．各語は，隣にある元

が等しいとき，べき乗の形に寄せ集めて，ゼロ乗を無視して，必要ならばこの手順を何回か繰り返すことにより，簡約された語へと簡略化することができる．1 つの例は 1 ページの説明を割く価値がある．$X = \{x, y, z\}$ と取り，次の語を考える．

$$w = x^{-3}x^2y^5y^{-5}x^7z^2z^{-2}x^{-1}xzy^2x^{-1}.$$

このとき，

$$\begin{aligned} w &= x^{-1}y^0x^7z^0x^0zy^2x^{-1} \\ &= x^{-1}x^7zy^2x^{-1} \\ &= x^6zy^2x^{-1} \end{aligned}$$

となり，これで簡約された．X の元は互いに交換することがないことに注意せよ．実際の簡約の過程を 2 通り以上の方法で実行することもあり得る．例えば，

$$\begin{aligned} w &= (x^{-3}x^2y^5y^{-5}x^7z^2)(z^{-2}x^{-1}xzy^2x^{-1}) \\ &= (x^{-1}y^0x^7z^2)(z^{-2}x^0zy^2x^{-1}) \\ &= (x^{-1}x^7z^2)(z^{-2}zy^2x^{-1}) \\ &= (x^6z^2)(z^{-1}y^2x^{-1}) \\ &= x^6z^2z^{-1}y^2x^{-1} \\ &= x^6zy^2x^{-1}. \end{aligned}$$

しかしながら，(27.1) において確かめるように，**最終的な結果はいつも同じである**．また，各語 w は唯 1 つの簡約された語 $\bar{w}$ を導く．語 x_1^0 を簡約すると記号のない語を与える．これは**空語**と呼ばれる．語の後に別の語を書くことにより，語を簡単に掛け合わせることができる．これを 2 つの簡約された語 w_1 と w_2 について行うと，このとき w_1w_2 は簡約されていないかもしれない．なぜならば，w_1 の最後の記号は w_2 の最初の記号と同じかもしれないからである．しかし，w_1w_2 は簡約された語 $\overline{w_1w_2}$ に簡略化され，すべての簡約された語の集合は，積として $\overline{w_1w_2}$ を用いれば，群をなす．結合法則は，$\overline{(\overline{w_1w_2})w_3}$ と $\overline{w_1(\overline{w_2w_3})}$ は語 $w_1w_2w_3$ の 2 つの異なる方法による簡約の結果であり，それゆえ，両方ともに簡約された語 $\overline{w_1w_2w_3}$ に等しいので，成り立つ．単位元は空語であり，簡約語 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ の逆元は

$$x_k^{-n_k}\cdots x_2^{-n_2}x_1^{-n_1}$$

であり，これはまた簡約されている．集合 X から構成される簡約された語のなすこの群は X（の元）によって**生成される自由群** (free group generated by (the elements of) X) と呼ばれ，$F(X)$ と書かれる．

これまでの議論は次の結果に根本的に依存している．

(27.1) 定理． 各語は唯 1 つの簡約語に簡略化することができる．

証明． コーシーの定理の証明を連想させるアイディアを使う．各 $x \in X$ に対して，式

$$\varphi_x(w) = \overline{xw}$$

により，簡約された語の集合の置換 φ_x を作る．ここで，w は簡約された語である．w は簡約されているので，明らかに $\overline{xw}$ は well-defined である．もし，

$$u = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_s^{m_s}$$

が任意の語であるならば，付随した置換の合成

$$\varphi_u = (\varphi_{x_1})^{m_1} (\varphi_{x_2})^{m_2} \cdots (\varphi_{x_s})^{m_s}$$

を得る．ここで，簡約された語の置換は置換の合成により群をなす．それゆえ，u, w が語で，u が何らかの方法で w に簡約されたとすると，$\varphi_u = \varphi_w$ となる．同じ語 u が 2 つの異なる方法で簡略化することができ，簡約された語 v と w を与えるとする．このとき，$\varphi_v = \varphi_u = \varphi_w$ となる．しかし，φ_v は空語を v へ送り，φ_w はそれを w へ送るので，よって，$v = w$ とならなければならない．　□

1 つの元 x で生成される自由群は，可能な簡約された語がべき乗 x^n だけであるので，無限巡回群である．2 つあるいはそれ以上の生成元があるとき，$F(X)$ はすべての元が無限位数を持つ非可換群である．X から Y への全単射 φ は $F(X)$ と $F(Y)$ の間の同型写像を誘導することに注意せよ．$F(X)$ の簡約された語

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

は $F(Y)$ の簡約された語

$$(\varphi_{x_1})^{n_1} (\varphi_{x_2})^{n_2} \cdots (\varphi_{x_k})^{n_k}$$

に対応する．F_n で n 個の元で自由に生成される「唯一の」群を表すことにする．

(27.2) 定理. F_n のアーベル群化は $\mathbb{Z}^n$ を与える.

証明. $z_1, \ldots, z_n$ を F_n の生成元の自由な集合としよう. 商群 $F_n/[F_n, F_n]$ はアーベル群であり, 剰余類 $z_k[F_n, F_n]$, $1 \leq k \leq n$ によって生成される. 各生成元のべき乗を集めることにより, この群のすべての元は次の形に唯一通りに書くことができる.

$$z_1^{r_1} z_2^{r_2} \cdots z_n^{r_n} [F_n, F_n].$$

対応

$$z_1^{r_1} z_2^{r_2} \cdots z_n^{r_n} [F_n, F_n] \longrightarrow (r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

は今や $F_n/[F_n, F_n]$ と $\mathbb{Z}^n$ の間の同型写像を与える. □

(27.3) 定理. F_m が F_n に同型ならば, $m = n$ である.

証明. 任意の 2 つの群 G, H に対して, 同型写像 $\varphi : G \to H$ は $[G, G]$ を $[H, H]$ へと送る. なぜならば, G における各交換子 $xyx^{-1}y^{-1}$ が H の交換子 $\varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1}$ に対応するからである. よって, φ は $G/[G, G]$ から $H/[H, H]$ への同型写像を誘導する. よって, F_m が F_n に同型ならば, $\mathbb{Z}^m \cong \mathbb{Z}^n$ であるので, 結果として, $m = n$ である. □

G を群として, X を G に対する生成元の集合とする. 自由群 $F(X)$ から G への自然な準同型写像 π で, 各簡約された語

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

を G における群の元の対応する積の上へ送るものが存在する. この準同型写像は, X が G を生成していることから全射であり, この写像の核を N と表すと, 第一同型定理により, $F(X)/N$ は G に同型である. **それゆえ, すべての群はある自由群の商群である.** この結果こそが私たちが群を生成元と関係式を用いて厳密に記述することを認めているのである. R を $F(X)$ における語の集まりで, これらの語と共役な元のすべてで N を生成するものとする. つまり, N は R を含む $F(X)$ の最小の正規部分群である. $F(X)$ から G へ移行するとき, これらの語は $F(X)$ のどの語が単位元になるか, あるいは同値なことであるが, G の元のどの積が G の単位元であるか, をきちんと定める. R を G に対する**定義関係**の集合と呼ぼう.

例 (i). $G = D_n$ で, $X = \{r, s\}$ ならば, 語 $r^n, s^2, (rs)^2$ は G に対する定義

関係の集合をなす．M でこれら 3 つの語を含む $F(X)$ の最小の正規部分群を表す．以前のように，準同型写像 $\pi : F(X) \to D_n$ の核には N を用いる．$M = N$ を示さなければならない．確かに，$r^n, s^2, (rs)^2$ は π によってすべて単位元に送られる．よって，M は N に含まれる．(16.5) により，核が N/M である全射準同型写像 $F(X)/M \to F(X)/N$ を得る．特に，$|F(X)/M|$ は少なくとも $2n$ である．ここで，剰余類 rM, sM が商群 $F(X)/M$ を生成し，これらは $r^n, s^2, (rs)^2$ がすべて M に属するから，

$$(rM)^n = M, \quad (sM)^2 = M, \quad (rsM)^2 = M$$

を満たす．あるいは，同値ではあるが，

$$(rM)^n = M, \quad (sM)^2 = M, \quad srM = r^{n-1}sM \tag{$*$}$$

を満たす．$(*)$ を用いれば，剰余類

$$M, rM, \ldots, r^{n-1}M, sM, rsM, \ldots, r^{n-1}sM$$

が $F(X)/M$ の**部分群**をなすことは容易に示せる．この部分群は rM と sM を含むから，よって，これは群 $F(X)/M$ 全体でなければならない．ゆえに，$|F(X)/M|$ は高々$2n$ である．したがって，$|F(X)/M| = 2n$ となり，要求されていたように，$M = N$ と結論できる．

空でない集合 X を取り，R を集合 X の語の集まりとする．**生成元** (generator) の集合 X と**定義関係** (defining relation) の集まり R によって定められる群は，商群 $F(X)/N$ と定められる．ここで，N は R を含む $F(X)$ の最小の正規部分群である．G が $F(X)/N$ に同型などのような群でも，組 X, R は G に対する**表示** (presentation) と呼ばれる．特に，X が元 $x_1, \ldots, x_s$ を持つ有限集合で，R が語 $w_1, \ldots, w_t$ からなる有限個の集まりならば，G は**有限表示される** (finitely presented) といい，

$$G \equiv \{x_1, \ldots, x_s | w_1, \ldots, w_t\}$$

と書く．

例 (ii)． $\mathbb{Z} \equiv \{x| — \}$.

例 (iii)． $\mathbb{Z}_n \equiv \{x|x^n\}$.

例 (iv)． $D_n \equiv \{x, y|x^n, y^2, (xy)^2\}$.

例 (v). $Q \equiv \{x, y | x^4, x^2 y^{-2}, xyxy^{-1}\}$.

例 (vi). $m \geq 2$ なる各整数に対して，表示

$$\{x, y | x^{2m}, x^m y^{-2}, xyxy^{-1}\}$$

は位数 $4m$ の群を定める．これを **2 重巡回群** (dicyclic group) という．

例 (vii). 同じ群はもちろん多くの異なる表示を持ち得る．例えば，

$$\mathbb{Z} \equiv \{x | \text{—}\} \equiv \{x, y | y\},$$
$$\mathbb{Z}_6 \equiv \{x | x^6\} \equiv \{x, y | x^3, y^2, xyx^{-1}y^{-1}\}.$$

$\mathbb{Z}_6$ のこの 2 番目の表示は，$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ の形を記述している．

例 (viii). $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \equiv \{x, y | xyx^{-1}y^{-1}\}$.

例 (ix). 表示

$$\{x_1, \ldots, x_n | x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1}, 1 \leq i < j \leq n\}$$

は**階数** n **の自由アーベル群**を定める．

例 (x). ここに，2 つの壁紙群に対する表示がある．

$$\text{pg} \equiv \{x, y | x^2 y^{-2}\}.$$

生成元は，平行な滑り反転である．26 章の記号を用いれば，$x = (\frac{1}{2}\mathbf{a}, B_0)$ と $y = (\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b}, B_0)$ と取ることができる．

$$\text{p3ml} \equiv \{x, y | x^2, y^3, (xy^{-1}xy)^3\}.$$

今度は，群は反転と位数 3 の回転によって生成されている．つまり，$x = (\mathbf{0}, B_0)$ と $y = (\mathbf{a}, A_{\frac{2\pi}{3}})$ である．

次のように自由群を**特徴付ける**ことができる．

(27.4) 定理. X を群 G の部分集合とする．このとき，X が G の生成元の自由な集合であるための必要十分条件は，任意に与えられた群 H と，X から H への写像に対して，この写像の G 全体から H への準同型写像への一意的な拡張が存在することである．

証明. X を G に対する生成元の自由な集合とする．このとき，$G - \{e\}$ の

各元を集合 X の中の簡約された語として唯一通りに書き表すことができる．群 H と写像 $f: X \to H$ が与えられたとき，f を G 全体から H への準同型写像へ拡張できる**唯一の方法**は，各簡約された語

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

を

$$[f(x_1)]^{n_1}[f(x_2)]^{n_2} \cdots [f(x_k)]^{n_k}$$

へ送り，G の単位元を H の単位元へ送ることである．

逆に，群 H が X から H への写像とともに与えられているとき，この写像の G から H への準同型写像への一意的な拡張をいつでも見つけることができると仮定する．以前のように，$\pi: F(X) \to G$ を各簡約された語を G の元と思って作られた同じ積へ写す準同型写像とする．X が確かに G に対する生成元の自由な集合であるとき，π が**同型写像**であることを示そう．$H = F(X)$ と取ると，X の $F(X)$ への埋め込みは準同型写像 $\varphi: G \to F(X)$ へと拡張する．明らかに，$\varphi\pi$ は $F(X)$ から $F(X)$ への恒等写像である．なぜならば，φ は X 上恒等写像だからである．また，$\pi\varphi: G \to G$ と G から G への恒等写像はともに，X の G の元全体への埋め込みを拡張した準同型写像である．仮定により，このような拡張は **1** つだけ存在する．ゆえに，$\pi\varphi$ は G から G への恒等写像である．結果として，π は同型写像である．　□

演習問題

27.1. アルファベット $\{x, y, z\}$ の中の次の語を，簡約された語に変換せよ．
(i) $w_1 = x^{-1}y^3y^{-1}z^{-2}zzy^{-1}z^{-4}z$.
(ii) $w_2 = z^3y^{-2}xx^{-1}yx^4z^{-6}z^4$.
(iii) $w_3 = zy^5y^{-2}y^{-3}z^5x^2z^{-1}zx^{-3}xz^{-4}x^{-4}y$.

27.2. 上の w_1, w_2, w_3 に対して，$\overline{w_1w_2} = x^3z^{-2}$, $\overline{w_2w_3} = z^3$, $\overline{w_1w_2w_3} = x^{-1}y$ となることを確かめよ．

27.3. m と n を正の整数とする．F_n から F_m の上への準同型写像が存在するための必要十分条件は，m が n 以下であることを証明せよ．

27.4. F_n は指数 2 の正規部分群を含むことを示せ．

27.5. $\{x, y | xyx^{-1}y^{-1}\}$ が $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に対する表示であることを詳細に確かめよ．

27.6. $\{x, y | y^2, (xy)^2\}$ は無限 2 面体群に対する表示であることを証明せよ．

27.7. $F_2 \times F_2$ は自由群でないことを示せ．$F_2 \times F_2$ に対する表示を書き下せ．

27.8. 7 個の装飾帯群の各々に対する表示を求めよ.(これらの群は演習問題 26.6 にて導入された.)

27.9. x, y が F_2 を生成するならば,

$$X = \{xyx^{-1}, x^2yx^{-2}, x^3yx^{-3}, \ldots\}$$

とし, H を X によって生成される部分群を表すものとする. X は H に対する生成元の自由な集合であることを示せ.

27.10. n を正の整数とする. F_2 は F_n に同型な部分群を含むことを証明せよ.

27.11. G と H が群ならば, 語 $x_1x_2\cdots x_n$ を作ることができる. ここで, 各 x_i は $G \cup H$ に属する. ただし, $G \cap H = \emptyset$ とする. 今度は, x_i と x_{i+1} が同じ群に決して属さず, x_i が G または H の単位元になることが決してないとき, 語は簡約されたと呼ぶ. 空語も入れて, 語を並べることで簡約された語を掛け合わせることとする. 必要ならば, 積を簡約することとする. 結果は群となることを示せ. この群は G と H の**自由積** (free product)$G * H$ と呼ばれる.

27.12. P を G と H の両方を部分群として含む群とする. G と H の上ではどちらも恒等写像であるような同型写像を経由して, P が自由積 $G * H$ に同型となるための必要十分条件は, 任意に群 K が与えられ, さらに, G と H の各々から K への準同型写像が与えられたとき, これらの準同型写像の P 全体から K への準同型写像への一意的な拡張があること, であることを示せ.

27.13. $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ は F_2 に同型であることを示せ.

27.14. 無限 2 面体群は $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ に同型であることを証明せよ.

第28章　木とニールセン–シュライアーの定理

グラフ (graph)Γ は，2 つの集合 A（有向辺）と V（頂点）に 2 つの写像

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow A, & \alpha &\longmapsto \bar{\alpha} \\ A &\longrightarrow V \times V, & \alpha &\longmapsto (i(\alpha), t(\alpha)) \end{aligned}$$

で，A の各元 α に対して，$\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$, $\bar{\alpha} \neq \alpha$ と $i(\bar{\alpha}) = t(\alpha)$ を満たすものからなる．頂点 $i(\alpha)$, $t(\alpha)$ はそれぞれ有向辺 α の**始点** (initial vertex)，**終点** (terminal vertex) であり，$\bar{\alpha}$ は α の**逆** (reverse) である．これからは有向辺を単に辺と呼ぶことにする．

これではあまりにも抽象的である！ 幸いにして，図 28.1(a) にあるように，頂点に対しては点を，辺に対しては弧を使うことにより，図を描くことができる．図に描かれた各々の辺は本来は有向辺の組を表していなければならないことを覚えてさえいれば，図 28.1(b) の簡略化された図で，実際私たちの直観には十分である．

Γ における頂点 u と頂点 v を結ぶ**道** (path) とは，辺 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ の順序付けられた列で，$i(\alpha_1) = u, i(\alpha_{k+1}) = t(\alpha_k)$ $(1 \leq k \leq n-1), t(\alpha_n) = v$ となるものである．特別な場合 $\alpha\bar{\alpha}$，辺の後にその逆をつなげたもの，は**輪** (round trip) と呼ばれる．あるグラフが，2 つの異なるどのような頂点もある道で結ばれていて，1 つの頂点を自分自身と結ぶすべての道は輪を含まなければならないならば，このとき，このグラフは**木** (tree) と呼ばれる．図 28.2 はこれらの定義を図示したものである．もし Γ が木で，u, v が Γ の異なる頂点ならば，u と v を結ぶ，輪を全く含まない**唯 1 つ**の道が存在する．この道は u から v への**測地線** (geodesic)$\overrightarrow{uv}$ である．u と v を結ぶ他のどのような道も，輪を続けざまに加えることにより，この測地線から得られる（演習問題 28.2 を見よ）．

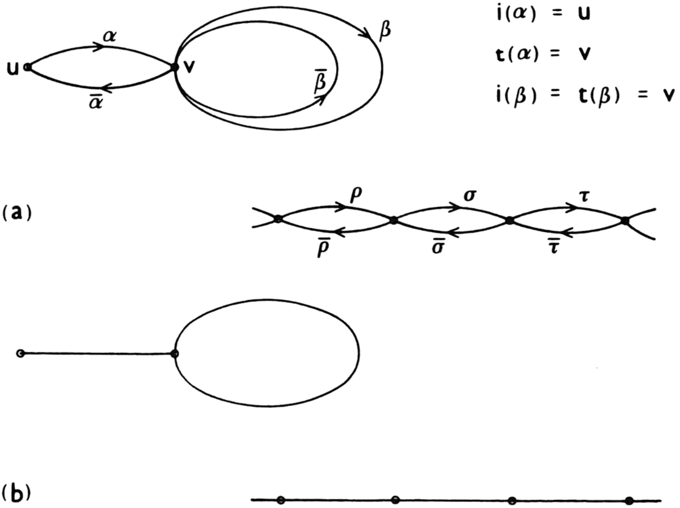


図 28.1

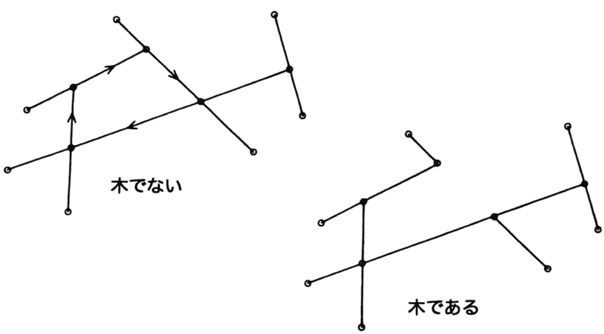


図 28.2

木の上に作用する群のアイディアを開発しよう．群 G のグラフ Γ 上の**作用** (action) とは，G の A 上と V 上の作用で，G の各元 g と A の各元 α に対して，$g(\bar{\alpha}) = \overline{g(\alpha)}, g(i(\alpha)) = i(g(\alpha)), g(\alpha) \neq \bar{\alpha}$ となるものをいう．別の言い方をすると，グラフとしての Γ の構造と整合性を持つような方法で，G の元は，Γ の辺と頂点を置換し，G のどの元も辺を逆向きにすることは許されない，ということである．

$$\begin{aligned} g(t(\alpha)) &= g(i(\bar{\alpha})) = i(g(\bar{\alpha})) \\ &= i(\overline{g(\alpha)}) = t(g(\alpha)) \end{aligned}$$

がすべての辺 α に対して成り立つから，群の元は終点上適切に振舞う．もし各頂点の固定部分群が G の自明な部分群 $\{e\}$ だけであるならば，G は Γ 上**自由に作用する** (acts freely) という．

例 (i)．簡略化された図が Y 字形であるグラフを取り，G を回転により作用する位数 3 の巡回群とする．形式的には，$A = \{\alpha_r, \bar{\alpha}_r | r = 1, 2, 3\}$ と $V = \{v, v_1, v_2, v_3\}$ であり，$\bar{\bar{\alpha}}_r = \alpha_r, i(\alpha_r) = t(\bar{\alpha}_r) = v, t(\alpha_r) = i(\bar{\alpha}_r) = v_r$ となるものである．g が G を生成するならば，このとき，作用は $g(\alpha_r) = \alpha_{r+1}$ (mod 3) により決定される．v の固定部分群は G 全体であり，よって，この場合は G は自由に作用していない．

例 (ii)．A を各整数 r に対して辺の組 $\alpha_r, \bar{\alpha}_r$ からなるものとし，V を $\mathbb{Z}$ と取る．$\bar{\bar{\alpha}}_r = \alpha_r$, $i(\alpha_r) = t(\bar{\alpha}_r) = r$, $t(\alpha_r) = i(\bar{\alpha}_r) = r + 1$ とおく．このグラフを実数軸上の整数部分に頂点の印が付けられたものと考えることにする．G が生成元 g を持つ無限巡回群ならば，$g(\alpha_r) = \alpha_{r+1}$ は Γ 上に G の**自由な**作用を定める．

例 (iii)．Γ を直前の例のものと取り，G を表示 $\{g, h | h^2, (gh)^2\}$ を持つ無限 2 面体群とする．このとき，$g(\alpha_r) = \alpha_{r+2}, h(\alpha_r) = \bar{\alpha}_{-r-1}$ は Γ 上の G の作用を与える．この例では，G は自由に作用していない．なぜならば，各頂点の固定部分群が位数 2 の巡回群だからである．具体的には，r の固定部分群は $\{e, g^r h\}$ である．

例 (iv)．群 G と G に対する生成元の集合 X が与えられたとき，以下のようにしてグラフ $\Gamma(G, X)$ を構成することができる．簡単のために，$x \in X$ のとき，$x^2 \neq e$ と仮定する．A をすべての順序付けられた組 (g, z) の集まりとする．ここで，g は G から来て，z か z^{-1} のいずれか一方は X に属するもの

とする．$V = G$ と取り，

$$\overline{(g,z)} = (gz, z^{-1}),$$
$$i((g,z)) = g, \quad t((g,z)) = gz$$

と定める．よって，G の各元に対して 1 つの頂点を持ち，$g_1x = g_2$ あるいは $g_1x^{-1} = g_2$ のいずれか一方が X のある生成元 x に対して成り立つ限り，始点 g_1，終点 g_2 を持つ 1 つの辺を持つ．左移動による G の自分自身への作用は，$\Gamma(G,X)$ の頂点を置換し，この作用は辺へ $g'((g,z)) = (g'g,z)$ として拡張され，$\Gamma(G,X)$ 上の G の**自由な**作用を与える．$x^2 = e$ がある $x \in X$ に対して成り立つならば，余分に辺が必要とされる．

このグラフのどのような 2 つの頂点 g,h も 1 つの道で結ぶことができる．$g,h \in G$ が与えられたとき，$g^{-1}h$ を記号の積 $z_1z_2\cdots z_k$ として表す．ここで，各記号は，X に属するか，その逆元が X に属するかのいずれかであるようなものとする．このとき，$h = gz_1z_2\cdots z_k$ であり，辺の列

$$(g,z_1), (gz_1,z_1), \ldots, (gz_1\cdots z_{k-1}, z_k)$$

は g から出発し，h で終わる道である．

ここで，2 つの特別な場合がある．G が位数 n の有限巡回群であり，X が唯 1 つの生成元からなるならば，$\Gamma(G,X)$ を回転により表される G の作用を持つ n 辺の多辺形と考えることができる．G が $X = \{x,y\}$ によって生成される自由群ならば，$\Gamma(G,X)$ の構造は図 28.3 に描かれているものになる．もちろん，私たちは最初の数段階までしか描けない．かなりの確証を持って，このグラフは木ではないか，と思う．

(28.1) 定理． X が G に対する生成元の自由な集合ならば，$\Gamma(G,X)$ は木である．

証明． $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ を頂点 g とそれ自身を結ぶ道とする．$\alpha_1 = (g,z_1)$, $\alpha_2 = (gz_1,z_2)$, …, $\alpha_n = (gz_1\cdots z_{n-1}, z_n)$ とすると，$g = gz_1z_2\cdots z_n$ となり，それゆえ，$e = z_1z_2\cdots z_n$ となる．X は G に対する生成元の自由な集合であるので，空語が e を表す唯 1 つの簡約された語である．よって，$z_1z_2\cdots z_n$ は，zz^{-1} の形の隣り合う記号の組を含まなければならない．言い換えれば，$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ は輪を含む．よって，$\Gamma(G,X)$ は木である．□

G が木 Γ に作用しているとする．各軌道から辺と点をそれぞれ 1 つより多

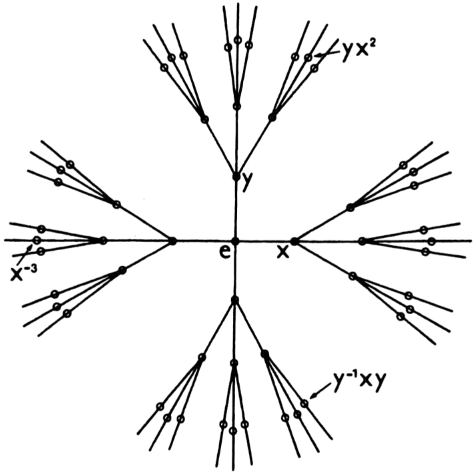


図 28.3

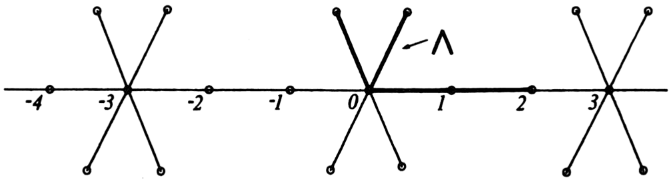


図 28.4

く含まない Γ の内部のすべての木の集まり T を考える．包含関係で与えられる半順序について極大となる T の元 Λ は，**基準木** (reference tree) と呼ばれる．極大とは，Δ もまた T に属し，$\Lambda \subseteq \Delta$ となるならば，$\Lambda = \Delta$ となることを意味する．極大元の存在はツォルンの補題 (Zorn's lemma) により保証されている（参考文献 [7]）．

例 (v)．Γ を図 28.4 に描かれている無限木とする．これを平面の部分集合と思うことにし，$g((x,y)) = (x+3y, y), h((x,y)) = (x, -y)$ によって定められる $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \equiv \{g, h | ghg^{-1}h^{-1}, h^2\}$ の作用を考える．基準木が図に示されている．頂点 0 を含む可能な基準木をすべて求めよ．全部で 12 個ある．

(28.2) 定理. 基準木は各軌道からちょうど1つの頂点を含む.

証明. Λ を木 Γ 上の G の作用に対する基準木とする．定義により，Λ のどの 2 つの頂点も同じ軌道の中にはない．Λ が各軌道から 1 つも頂点を含まないものとしよう．Λ から頂点 v と Γ の頂点 z でその軌道が Λ と共通部分を持たないものを選ぶ．α を $\overrightarrow{zv}$ の最初の辺とし，$y = t(\alpha)$ とする．もし y の軌道が Λ と共通部分，例えば，$g(y) \in \Lambda$ を持てば，$g(z), g(\alpha), g(\bar{\alpha})$ を Λ に加えて，各軌道から高々1 つの頂点を含む Λ よりも大きな木を作る．これは，Λ の極大性に矛盾する．一方，もし y の軌道が Λ と共通部分を持たなければ，単に z を y に置き換えて，矛盾に到達するまで，これまでの議論を続ければよい． □

(28.3) 定理. G が木に自由に作用するならば，G は自由群である．

証明. 木 Γ 上に G が自由に作用しているとし，作用に対する基準木 Λ を 1 つ選ぶ．このとき，Λ は各軌道からちょうど 1 つの頂点を含む．Γ の辺で Λ に属さないが，始点は Λ に属するようなものの集まりを A_* と表す．$\alpha \in A_*$ が与えられたとき，z を $t(\alpha)$ と同じ軌道にある Λ の頂点とし，$g_\alpha(z) = t(\alpha)$ となる群の元 g_α を選ぶ．この性質を持つ G の元は唯 1 つだけ存在する．というのも，もし g_α と h_α がともに z を $t(\alpha)$ に送るとすると，このとき，$h_\alpha^{-1} g_\alpha(z) = z$ となる．しかし，作用は自由なので，よって，$h_\alpha^{-1} g_\alpha$ は G の単位元でなければならない．結果として，$g_\alpha = h_\alpha$ となる．これらの辺と群の元は組となって現れる．なぜなら，辺 $\alpha' = g_\alpha^{-1}(\bar{\alpha})$ もまた A_* に属し，これに対応する群の元は $g_{\alpha'} = g_\alpha^{-1}$ であるから（図 28.5 を見よ）．このような組 g_α, g_α^{-1} の各々から 1 つを選び，結果として得る G の部分集合を表すのに X を用いる．X は G に対する生成元の自由な集合であることを示そう．

Λ から頂点 v を 1 つ選ぶ．$g \in G - \{e\}$ が与えられたとき，α を v から $g(v)$ への測地線の最初の辺で，Λ に含まれないものとする．このとき，もちろん，α は A_* に属する．g_α^{-1} を $t(\alpha)$ から $g(v)$ への測地線へ作用させる．結果として得られる道は，Λ の頂点 $g_\alpha^{-1}(t(\alpha))$ から出発し，$g_\alpha^{-1} g(v)$ で終わる．この新しい道を Λ から離れていく最初の辺 β までたどり，ここで g_β^{-1} を $t(\beta)$ から $g_\alpha^{-1} g(v)$ への測地線へ作用させる．再び，Λ の中から出発する道を得て，今回はこの道は $g_\beta^{-1} g_\alpha^{-1} g(v)$ で終わる．この手順を繰り返す．道は各段階で短くなっていくことに注意せよ．ゆえに，やがて，全体が Λ に属する 1 つの道を作れる．その終点は，例えば，$g_\nu^{-1} \cdots g_\beta^{-1} g_\alpha^{-1} g(v)$ である．Λ の頂点が

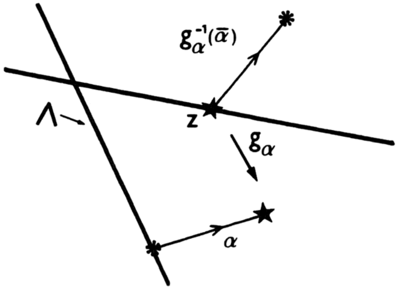


図 28.5

2 つ同じ軌道に属することはないので，$g_\nu^{-1}\cdots g_\beta^{-1}g_\alpha^{-1}g(v)=v$ とならなければならない．作用は自由なので，これは，$g_\nu^{-1}\cdots g_\beta^{-1}g_\alpha^{-1}g=e$ を与える．よって，

$$g=g_\alpha g_\beta\cdots g_\nu \qquad (*)$$

を得る．すでに，X の元が G を生成することがわかる．

$(*)$ の右辺は X からの記号での**簡約された語** $w(g)$ を 1 つ定める．私たちの構成は測地線 $\overrightarrow{vg(v)}$ を使ったが，v と $g(v)$ を結ぶ他のどのような道もまた同様に使うことができ，**同じ**簡約された語を導く．まず最初に，1 つの輪 $\sigma\bar{\sigma}$ を測地線に加えても，$w(g)$ を変えないことを確かめよう．これは簡単である．上の過程の間，ひたすら σ を追っていけばよい．ある段階で σ が Λ の中に入り込む，この場合には $(*)$ は変わらない，か，σ が A_* の辺 τ へ写る場合には $(*)$ は $g=g_\alpha g_\beta\cdots g_\tau g_\tau^{-1}\cdots g_\nu$ に変わるか，のいずれかである．いずれの場合も，$w(g)$ は変わることはない．さらに輪を追加しても同様な方法で扱ってよい．ここで，2 つの頂点を結ぶ任意の道は輪を続けざまに加えることにより測地線から得ることができることを思い出そう．

議論を完成させるために，任意の分解 $g=g_\gamma g_\delta\cdots g_\rho$ （ここで $\gamma,\delta,\ldots,\rho$ はすべて A_* に属する）は v から $g(v)$ への適切に選ばれた道によって実現されることを示そう．そうすれば，$w(g)$ が，g を表す X の元の中の**唯 1 つの**簡約された語であることは確かである．分解の長さに関する帰納法を使って，議論を進めよう．$g_1=g_\delta\cdots g_\rho$ とおき，P を v から $g_1(v)$ への道で，g_1 のこの分解を実現するものとする．$\overrightarrow{vg_\gamma(v)}$, $g_\gamma(P)$ とたどって，v から $g(v)$ への道 Q を作る．$\overrightarrow{vg_\gamma(v)}$ を調べると，これは $\overrightarrow{vi(\gamma)}$ から始まって，γ に沿って Λ

を離れ，そして，$g_\gamma(\overrightarrow{zv})$ に沿って続いていく．ここで，$z = g_\gamma^{-1}(t(\gamma)) \in \Lambda$ である．この過程の最初の段階を Q へ適用することにより，g_γ を作り，P に続けて，$\overrightarrow{zv}$（これは Λ に属する）が残る．よって，Q は，求められていたように，$g_\gamma g_\delta \cdots g_\rho$ を実現する． □

(28.4) ニールセン–シュライアーの定理. 自由群のすべての部分群は自由群である．

証明. F を集合 X によって生成される自由群とし，G を F の部分群とする．F が木 $\Gamma(F, X)$ 上に自由に作用することは知っているから，結果として，G もそうである．よって，(28.3) により，G は自由群である． □

演習問題

28.1. 次のグラフの（簡略化された）図を描け．

(i)

$$A = \{\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}, \gamma, \bar{\gamma}, \delta, \bar{\delta}\},$$
$$V = \{u, v, w\},$$
$$i(\alpha) = t(\gamma) = t(\delta) = u,$$
$$t(\alpha) = i(\beta) = i(\delta) = v,$$
$$t(\beta) = i(\gamma) = w.$$

(ii)

$$A = \{\alpha_r, \bar{\alpha}_r | 1 \le r \le 7\},$$
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\},$$
$$i(\alpha_1) = t(\alpha_4) = i(\alpha_5) = t(\alpha_7) = v_1,$$
$$t(\alpha_1) = i(\alpha_2) = t(\alpha_6) = v_2,$$
$$t(\alpha_2) = i(\alpha_3) = t(\alpha_5) = i(\alpha_7) = v_3,$$
$$t(\alpha_3) = i(\alpha_4) = i(\alpha_6) = v_4.$$

28.2. u, v を木 Γ の異なる頂点とする．u と v を結ぶ Γ の道で，どのような輪も含まないものが唯 1 つ存在することを示せ．この道は，いわゆる，測地線 $\overrightarrow{uv}$ である．もし P が u から v への別の道であるならば，Γ の道 $P_1, \ldots, P_k$ で，そのすべてが u と v を結び，P_{r+1} は 1 つの輪を P_r $(1 \le r \le k-1, P_1 = \overrightarrow{uv}, P_k = P)$ に加えることにより得られるようなものが存在することを示せ．

28.3. 木 Γ 上に群作用があるとする．群の元 g が Γ の 2 つの頂点 u, v を固定する

ならば，g は測地線 $\overrightarrow{uv}$ のすべてを固定しなければならないことを証明せよ．

28.4. この章の例 (i), (ii), (iii) の中で記述された群作用に対する基準木をそれぞれ求めよ．

28.5. 演習問題 28.1 に記述されているグラフの各々に関して，位数 2 の巡回群の可能な作用をすべて求めよ．

28.6. この章の例 (ii) の状況および図 28.3 に示されている木の上の 2 つの生成元に関する自由群の自然な作用に対して，定理 28.3 の証明がどのようになるか，を調べよ．

28.7. 2×2 行列で成分が整数であり，行列式の値が $+1$ である群 $SL_2(\mathbb{Z})$ の元は複素平面の上半分にメビウス変換として作用する．α を上半平面における $\exp(i\pi/3)$ と $\exp(i\pi/2)$ を結ぶ単位円上の弧とし，Γ をすべての弓形 $g(\alpha)$, $g \in SL_2(\mathbb{Z})$ の和集合と定める．Γ の図を描き，それが木を表していることを確かめよ．この木の上の $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用は，自由な作用ではないことを示せ．

28.8. u, v をグラフ Γ の頂点とする．もし P, P' がともに u と v を結ぶ道であるならば，P' が P に 1 つの輪を加えて，あるいは，取り除いて得られるとき，P' は P に隣接するという．これは，Γ における u から v への道全体の集まりにおける同値関係を導くことを示せ．ここで，P は Q と関係しているとは，道 $P_1, \cdots, P_k$ で，そのすべてが u と v を結び，$P_1 = P, P_k = Q$ であり，$1 \leq r \leq k-1$ に対して，P_r が P_{r+1} と隣接しているときとする．Γ が木であるとき，いくつの同値類があるか？

28.9. いつものように Γ はグラフで，v は Γ の頂点とする．v と自分自身を結ぶ Γ の道 P は v を基点とする閉道 (loop) と呼ばれ，$[P]$ は，前問で導入された同値関係における同値類を表すのに使われる．もし，$P = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s$ と $Q = \beta_1\beta_2\cdots\beta_t$ がともに u と v を結ぶならば，閉道 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s\beta_1\beta_2\cdots\beta_t$ を PQ と書く．v を基点とする閉道の同値類のすべての集まりは，積 $[P][Q] = [PQ]$ により群をなすことを証明せよ．(まず積が well-defined であることを確かめることから始めるべきである.) この群は v を基点とする Γ の基本群 (fundamental group) と呼ばれる．

28.10. 前問の用語を採用することにして，Γ のどのような 2 つの異なる頂点も 1 つの道で結ばれると仮定する．Λ を Γ における極大な木とする．Λ は Γ のすべての頂点を含むことを示せ．Λ に属さない各有向辺の組から 1 つ辺を選び，X を結果として得られる辺の集まりを表す．v を基点とする Γ の基本群は，自由群 $F(X)$ に同型であることを証明せよ．

参考文献

[1] Weyl, H., *Symmetry*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1952[1].
(すべての数学教師と学生に読まれるべき古典的なエッセイ.)

[2] Lyndon, R.C., *Groups and Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge (England), 1985.

[3] Neumann, P.M., Stoy, G.A., Thompson, E.C., *Groups and Geometry*, Duplicated notes produced by the Mathematical Institute, Oxford University, 1980.

[4] Rees, E.G., *Notes on Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heiderberg, 1983[2].
(幾何学における群の役割について.)

[5] Hill, V.E., *Groups, Representations and Characters*, Hafner Press, New York, 1975.
(表現論の初めに.)

[6] Rotman, J.J., *The Theory of Groups: An Introduction*[3], Allyn and Bacon, Boston, Third Edition 1984.
(素晴らしい学部卒業レベルの教科書.)

[7] Halmos, P.R., *Naive Set Theory*, Van Nostrand, Princeton N.J., 1960 and Springer-Verlag, New York, 1974[4].
(ツォルンの補題を含む，集合論の基礎. 数学の書き方の実例.)

---

1 ［訳注］邦訳は,『シンメトリー』, ヘルマン・ヴァイル著, 遠山啓訳, 紀伊國屋書店, 1970.

2 ［訳注］邦訳は,『幾何学講義』, Elmer G. Rees 著, 三村護訳, 共立出版, 1992.

3 ［訳注］第 3 版からタイトルが *An introduction to the theory of groups* に変わった. 原書のタイトルは第 1, 2 版のものである.

4 ［訳注］邦訳は,『素朴集合論』, P.R. ハルモス著, 富川滋訳, ミネルヴァ書房, 1975.

[8] Jones, O., *The Grammar of Ornament*, Day and Son, London, 1856 and Omega Books, Ware(England), 1986[5].
（世界中の異なる文明による装飾模様とデザインの素敵なコレクション.）

[9] Martin, G.E., *Transformation Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[10] Lockwood, E.H. and Macmillan, R.H., *Geometric Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge (England), 1978.
（装飾帯，壁紙，空間の模様に関するたくさんの情報について.）

5 ［訳注］邦訳は,『世界装飾文様 2020 1, 2』, オーウェン・ジョーンズ編著，佐野敬彦，渡辺真解説，学習研究社，1987.

訳者あとがき

本書の原書はSpringer-Verlag社のUndergraduate Texts in Mathematics（学部学生向けの数学の教科書のシリーズ）の1巻として1988年に出版された．

訳者が所属する立教大学で，数学科2年生後期の群論の入門的講義を担当することになったときに，講義向けあるいは学生の自習向けに何かよい教科書はないか，と邦書をいろいろ探してみた．群論の専門書は敷居が高すぎるのは言うまでもないが，入門書と目されているものは例が乏しく抽象的な理論展開に終始している本が多いように思えた．これでは，学生が自習するにも困るであろうと思い，何か適切な本がないかと図書館で探していたときに，たまたま目にした本書が，訳者の予定していた講義にぴったりと当てはまる内容であったので，この原書をもとにして講義を行った．本書は図形の（回転）対称性を例に取って，群とはどのようなものか，から始まり，新しい群の例を構成するためにいくつかの定理や命題を証明していく．このようにして，例を豊富に挙げつつ，群の理論も自然と学んでいけるように配慮されている．読んでいるうちに，いつの間にか群の元の個数が12以下の有限群の分類までたどり着いてしまう．その巧みな流れは，教える側にとっても大変楽しいものであった．実際に，学生たちも「目に見える」具体例を通して群論の入門的な内容を楽しみながら学んでいったように思えた．特に，演習問題などは，図を描いたり，実際に自分で立体を作ってみたりして，問題を解いていた学生たちの姿が印象的である．このような楽しい本の邦訳がないのは大変残念であると思い，翻訳することを決心した．

本書では，1つの章は，群論に関する1つの基本事項を習得すべく内容を絞って，例を織り交ぜながら，群論の入門的な内容を取り扱っている．第1章から第20章までが，群論の初級コースに相当する内容である．第21, 22章

では，有限生成アーベル群の分類定理を証明し，群の生成元と関係式による表示も登場する．第23章では自己同型群を扱い，第24, 25, 26章では，ユークリッド群による壁紙模様（あるいは2次元結晶格子）の分類を行う．規則正しく並んでいる模様には，群が背景にあることを学ぶのであるが，これを学んだ後では，家の中や，街に出て模様を見たときに，どんな群なのかを考えてしまうかもしれない．群の理論は実用性があるという話題の1つを提供してくれる．残りの2つの章では，最も非可換性の強い自由群について学び，自由群の木 (tree) 上への作用を導入して，自由群の任意の部分群はまた自由群であることを証明して本書を締めくくる．

本書はあくまでも群論に関する入門書であるので，本書を読んで群論のより専門的な内容に興味を抱いた読者は，ぜひ「群論」と名の付く本を手にとって頂きたい．日本語で書かれた群論の専門書は優れたものが多い．また，本書は対称性からの群論への入門ということもあり，代数的な側面で触れられていない部分がある．たとえば，ベキ零群・可解群，組成列，ジョルダン–ヘルダーの定理，それに群の表現論などがある．必要であれば，これらは他の本で補ってほしい．

原書はとてもリズミカルに書かれているため，それを日本語に反映するのは大変骨を折る作業であった．かなり訳者による意訳が含まれているが，原書の内容を損なわないよう心がけてある．もし，不適切な翻訳があるとすれば，それはひとえに訳者の責任である．ご指摘いただけると大変ありがたい．

最後に，本書の編集・制作でお世話になった，シュプリンガー・ジャパン編集部のスタッフに感謝するとともに，本書の完成まで暖かく励ましてくれ，またいろいろと我慢をしてくれた妻 紘子に感謝する．

虫の音の響く武蔵野にて，2007年秋

佐藤 信哉

索　引

●さ行

●た行

●や行

●ら行

●わ行

著　者
M.A. アームストロング (Mark Anthony Armstrong)
Department of Mathematical Sciences, University of Durham, Durham DH1 3LE England
1943 年，英国ワーキントン生まれ．1966 年，ウォリック大学で E.C. ジーマンの指導の下，組合せ位相幾何学に関する論文で博士号を取得．現在，英国ダーラム大学数理科学学科上級講師 (Senior Lecturer)．専門は，幾何学的トポロジー．

訳　者
佐藤　信哉（さとう　のぶや）
1997 年，東京大学大学院数理科学研究科博士課程修了．
立教大学理学部数学科准教授．博士（数理科学）．
専門：作用素環論．

対称性からの群論入門　　　　**定価（本体 2,800 円＋税）**

発　行	2007 年 11 月 9 日
著　者	M.A. アームストロング
訳　者	佐藤 信哉
発行者	深田 良治
発行所	シュプリンガー・ジャパン株式会社 〒102-0073　東京都千代田区九段北 1 丁目 11 番 11 号 第 2 フナトビル TEL (03) 6831-7005 (営業直通)
印刷所	平河工業社

<検印省略>許可なしに転載，複製することを禁じます．落丁本，乱丁本はお取り替えします．

ISBN 978-4-431-10007-2　C3041　　　http://www.springer.jp
© 2007 Springer
Printed in Japan

国際数学連合・ユニセフ主催キャンペーン「世界数学年」企画，夢の競作集!

世界の頭脳が新千年紀を記念して公開した，
21世紀の未解決問題と将来の展望.

数学の最先端
21世紀への挑戦

日本語版監修：砂田利一

各巻本体2，２００円

第1巻 ISBN978-4-431-70962-6
第2巻 ISBN978-4-431-70963-3
第3巻 ISBN978-4-431-71039-4
第4巻 ISBN978-4-431-71040-0
第5巻 ISBN978-4-431-71122-3
第6巻 ISBN978-4-431-71190-2

第1巻

●ファルティングス…「ディオファントス方程式」（森脇淳 訳）
●グロモフ…「このさき数十年に起こり得る数学の動向」（砂田利一 訳）
●小林俊行…「非リーマン等質空間の不連続群論」（吉野太郎 ほか訳）
●コンツェビッチ／ザギエ…「周期」（黒川信重 訳）
●斎藤恭司…「原始保型形式」
●ツィーグラー…「ポリトープについての問題」（前原潤 訳）

第2巻

●ブルギニョン…「数学と社会の新しい関係」（砂田利一 訳）
●コーエン…「計算の立場から見た数論」（山本芳彦 訳）
●ペンローズ…「ツイスターと一般相対論」（伊藤光弘 訳）
●ヒッチン…「大域微分幾何学」（大仁田義裕 訳）
●ラング…「どこでも熱核」（若山正人 訳）
●京都大学数理解析研究所インタビュー

第3巻

●アティヤ…「緒言」（砂田利一 訳）●アーノルド…「多元数学」（蟹江幸博 訳）●コンヌ…「非可換幾何学とリーマンゼータ関数」（丸山文綱 訳）●ドナルドソン…「多項式，消滅サイクル，フレアホモロジー」（古田幹雄 訳）●ジョーンズ…「10の問題」（村上順 訳）●カーワン…「数学：正しい選択？」（太田啓史 訳）●リオンス…「非線形偏微分方程式の未解決問題への挑戦」（有澤眞理子 訳）●マクダフ…「シンプレクティック幾何瞥見」（小野薫 訳）●サルナック…「数論，解析学，数理物理学における諸問題」（小山信也 訳）●ヴァッファ…「数学と物理学の間の働きかけ合いの将来について」（牛腸徹 訳）●ワイルズ…「数論の20年」（斎藤秀司 訳）

第4巻

●チャーン…「リーマンに戻る」（砂田利一 訳）●ガワーズ…「数学の2つの文化」（中本敦浩 訳）
●ラックス…「数学と数値計算」（岡本久 訳）●マイダ…「実世界の乱流と現代応用数学」（柳田英二 訳）●スメイル…「21世紀の数学の問題について」（田中一之，山崎武 訳）●スタンレー…「代数的組合せ論における正値性問題と予想」（日比孝之 訳）●ペンローズ…「20世紀および21世紀の数理物理学」●ウィッテン…「マジック，ミステリー，そしてマトリックス」（牛腸徹 訳）

第5巻

●ベイカー/ヴュストルツ…「数論，超越数論とディオファントス幾何学」（平田典子 訳）
●マニン…「職業および使命としての数学」（砂田利一 訳）
●メイザー…「p 進変動の主題」（梶原健 訳）
●ヤオ…「幾何と解析の展望」（納谷信 訳）

第6巻

●ブルガン…「調和解析と組み合わせ論」（宮地晶彦 訳）●カジュダン…「代数的積分」（今野拓也 訳）
●マルグリス…「剛性理論における問題と予想」（納谷信 訳）
●森重文…「代数多様体上の有理曲線」●マンフォード…「確率時代の夜明け」（荒川薫 訳）
●ロス…「規則性の限界」（黒川信重，小山信也 訳）
●ルーエル…「数学についての地球外生物との会話」（砂田利一 訳）

Springer

シュプリンガー数学クラシックス

Springer

1	代数幾何学入門	B.L.ファン・デル・ヴェルデン著 ●前田博信訳	本体4,180円 ISBN978-4-431-71138-4
2	楕円関数論	A.フルヴィッツ／R.クーラント著 ●足立恒雄／小松啓一訳	本体2,500円 ISBN978-4-431-71242-8
3	２次形式と直交群	M.アイヒラー著 ●平松豊一／味村良雄訳	本体3,800円 ISBN978-4-431-71181-0
4	数学の基礎	D.ヒルベルト／P.ベルナイス著 ●吉田夏彦／渕野昌訳	本体3,800円 ISBN978-4-431-71241-1
5	正20面体と５次方程式 改訂新版	F.クライン著 ●関口次郎／前田博信訳	本体4,200円 ISBN978-4-431-71118-6
6	微分トポロジー講義	J.W.ミルナー著 ●蟹江幸博訳	本体2,500円 ISBN978-4-431-70787-5
7	行列の摂動	加藤敏夫著 ●丸山徹訳	本体3,800円 ISBN978-4-431-70756-1
8 9	数論入門 Ⅰ,Ⅱ	G.H.ハーディ／E.M.ライト著 ●示野信一／矢神毅訳	8 Ⅰ本体4,200円 ISBN978-4-431-70848-3 9 Ⅱ本体2,800円 ISBN978-4-431-70924-4
10	特性類講義	J.W.ミルナー／J.D.スタシェフ著 ●佐伯修／佐久間一浩訳	本体4,600円 ISBN978-4-431-70828-5
11	不等式	G.H.ハーディ／J.E.リトルウッド／G.ポーヤ著 ●細川尋史訳	本体4,800円 ISBN978-4-431-71056-1
12	偏微分方程式	F.ジョン著 ●佐々木徹／示野信一／橋本義武訳	本体3,800円 ISBN978-4-431-71055-4
13	複素超曲面の特異点	J.W.ミルナー著 ●佐伯修／佐久間一浩訳	本体3,200円 ISBN978-4-431-71073-8
14	位相幾何学講義	H.ザイフェルト／W.トレルファル著 ●三村護訳	本体4,700円 ISBN978-4-431-70877-3
15	古典群 不変式と表現	H.ワイル著 ●蟹江幸博訳	本体4,800円 ISBN978-4-431-71125-4
16	アイゼンシュタインとクロネッカーによる楕円関数論	A.ヴェイユ著 ●金子昌信著	本体2,500円 ISBN978-4-431-71169-8
17	複素多様体講義	S.S.チャーン著 ●藤木明／本多宣博訳	本体2,500円 ISBN978-4-431-71084-4
18	数の代数的理論	P.サミュエル著 ●織田進訳	本体2,700円 ISBN978-4-431-71188-9
19	代数幾何学講義	D.マンフォード著 ●前田博信訳	本体4,500円 ISBN978-4-431-71231-2

Springer

シュプリンガー数学リーディングス

1	オイラー入門	W.ダンハム著 ●黒川信重／若山正人／百々谷哲也訳	本体2,700円 ISBN978-4-431-71079-0
2	メジャーリーグの数理科学　上	J.アルバート／J.ベネット著 ●後藤寿彦監修／加藤貴昭訳	本体2,700円 ISBN978-4-431-71016-5
3	メジャーリーグの数理科学　下	J.アルバート／J.ベネット著 ●後藤寿彦監修／加藤貴昭訳	本体2,700円 ISBN978-4-431-71017-2
4	確率論へようこそ	G.ブロム/L.ホルスト/D.サンデル著 ●森真訳	本体2,700円 ISBN978-4-431-71145-2
5	シンデレラで学ぶ平面幾何	阿原一志著	本体2,700円 ISBN978-4-431-71120-9
6	数・上	H.-D.エビングハウス他著 ●成木勇夫訳	本体2,700円 ISBN978-4-431-71123-0
7	数・下	H.-D.エビングハウス他著 ●成木勇夫訳	本体 2,700円 ISBN978-4-431-71124-7
8	トポロジーの絵本	G.K.フランシス著 ●笠原晧司監訳／宮崎興二訳	本体2,700円 ISBN978-4-431-71184-1
9	ダイヤモンドはなぜ美しい？ −離散調和解析入門−	砂田利一著	本体2,700円 ISBN978-4-431-71191-9
10	素数が香り、形がきこえる −目で見る２次形式からはじまる数学−	J.H.コンウェイ著 ●細川尋史訳	本体2,300円 ISBN978-4-431-71208-4
11	オイラー探検 −無限大の滝と12連峰−	黒川信重著	本体2,300円 ISBN978-4-431-70774-5
12	自然科学における数学的方法	G.ポーヤ著 ●細川尋史訳	本体2,700円 ISBN978-4-431-10001-0

Springer

シュプリンガー数学クラブ

1	**ある数学者の生涯と弁明**	G.H.ハーディ／C.P.スノー著 ●柳生孝昭訳	本体1,262円 ISBN978-4-431-70665-6
2	**ガウスが切り開いた道**	S.G.ギンディキン著 ●三浦伸夫訳	本体1,340円 ISBN978-4-431-70704-2
3	**ガリレイの17世紀** ガリレイ，ホイヘンス，パスカルの物語	S.G.ギンディキン著 ●三浦伸夫訳	本体1,534円 ISBN978-4-431-70703-5
4	**数学100の勝利** vol.1 数と関数の問題	H.デリー著 ●根上生也訳	本体1,631円 ISBN978-4-431-70687-8
5	**数学100の勝利** vol.2 平面図形の問題	H.デリー著 ●根上生也訳	本体1,631円 ISBN978-4-431-70701-1
6	**数学100の勝利** vol.3 空間と星の問題	H.デリー著 ●根上生也訳	本体1,534円 ISBN978-4-431-70702-8
7	**ガロアの時代 ガロアの数学** 第一部 時代篇	彌永昌吉著	本体1,980円 ISBN978-4-431-70688-5
8	**ガロアの時代 ガロアの数学** 第二部 数学篇	彌永昌吉著	本体1,980円 ISBN978-4-431-70802-5
9	**数理解析のパイオニアたち**	V.I.アーノルド著 ●蟹江幸博訳	本体1,600円 ISBN978-4-431-70820-9
10	**ブルバキ** 数学者達の秘密結社	M.マシャル著 ●高橋礼司訳	本体2,400円 ISBN978-4-431-70926-8
11	**数学の切手コレクション**	R.J.ウィルソン著 ●熊原啓作訳	本体2,400円 ISBN978-4-431-71018-9
12	**アンドレ・ヴェイユ自伝 上** ある数学者の修業時代	A.ヴェイユ著 ●稲葉延子訳	本体1,800円 ISBN978-4-431-71109-4
13	**アンドレ・ヴェイユ自伝 下** ある数学者の修業時代	A.ヴェイユ著 ●稲葉延子訳	本体1,800円 ISBN978-4-431-71110-0
14	**天体力学のパイオニアたち 上** カオスと安定性をめぐる人物史	F.ディアク／P.ホームズ著 ●吉田春夫訳	本体1,900円 ISBN978-4-431-71114-8
15	**天体力学のパイオニアたち 下** カオスと安定性をめぐる人物史	F.ディアク／P.ホームズ著 ●吉田春夫訳	本体1,600円 ISBN978-4-431-71115-5
16	**志学数学** 研究の諸段階　発表の工夫	伊原康隆著	本体1,680円 ISBN978-4-431-71140-7
17	**バナッハとポーランド数学**	R.カウージャ著 ●志賀浩二監訳	本体2,100円 ISBN978-4-431-71186-5
18	**数学者列伝 I**	I.ジェイムズ著 ●蟹江幸博訳	本体1,800円 ISBN978-4-431-71119-3